

### 3. Математическая грамотность

#### 3.1 Основная цель изучения математической подготовки учащихся

В отличие от других международных и национальных проверок математической подготовки учащихся в рамках исследования ПИЗА не ставилась цель специально проверить овладение конкретными вопросами содержания школьных курсов математики. По мнению передовых ученых, наряду с формированием предметных знаний и умений школа должна обеспечивать развитие у учащихся умения использовать свои математические знания для разрешения разнообразных ситуаций, близких к реальным. В дальнейшем это умение будет способствовать активному участию выпускника школы в жизни современного общества. Это и определило главную цель исследования – проверку состояния таких умений, которые способствуют успешности выпускника школы во взрослой жизни. Выбор данной цели определил необходимость изменить подходы к определению содержания проверки математической подготовки учащихся по сравнению с другими подобными исследованиями.

#### 3.2 Концептуальные подходы к оценке математической грамотности

Исследование ПИЗА, не исключая опосредованной проверки усвоения основного материала школьных курсов математики, главное внимание направляет на проверку овладения более общими понятиями, идеями и умениями, которые международная общественность считает необходимыми для формирования у современного человека так называемого «человеческого капитала», важного для дальнейшей жизни. Этот «капитал» включает знания, умения, междисциплинарную компетентность (способность использовать знания, полученные в рамках изучения различных учебных предметов или из других внешних источников информации, для решения поставленной задачи), умение приобретать знания в течение всей жизни и другие качества, от развития которых зависит личное, социальное и экономическое процветание человека, его участие в жизни общества.

Что же  
включено в  
содержание  
понятия  
«математи-  
ческая  
грамотность»

Определение содержания проверки математической подготовки в данном исследовании основано на понятии математической грамотности. Принято следующее определение этого понятия: *«математическая грамотность – способность человека определять и понимать роль математики в мире, в котором он живет, высказывать хорошо обоснованные математические суждения и использовать математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному, заинтересованному и мыслящему гражданину»* [23, 29].

Содержание этого понятия уточняется следующим образом. Под математической грамотностью понимается способность учащихся:

- распознавать проблемы, возникающие в окружающей действительности, которые могут быть решены средствами математики;

Компоненты математической грамотности	<ul style="list-style-type: none"> <li>- формулировать эти проблемы на языке математики;</li> <li>- решать эти проблемы, используя математические знания и методы;</li> <li>- анализировать использованные методы решения;</li> <li>- интерпретировать полученные результаты с учетом поставленной проблемы;</li> <li>- формулировать и записывать окончательные результаты решения поставленной проблемы.</li> </ul>
	<p>В этом определении «математической грамотности» основной упор сделан не на овладение предметными умениями, а на функциональную грамотность, позволяющую свободно использовать математические знания для удовлетворения различных потребностей – как личных, так и общественных.<sup>7</sup> Согласно этому в исследовании основное внимание уделяется проверке способности учащихся использовать математические знания в разнообразных ситуациях, требующих для своего решения различных подходов, размышлений и интуиции. Очевидно, что для этого явно необходимо иметь значительный объем математических знаний и умений, которые не сводятся к знанию математических фактов, терминологии, стандартных методов и умению выполнять стандартные действия и использовать определенные методы.</p>
	<p>Сущность понятия «грамотности» определяется тремя признаками: пониманием роли математики в реальном мире, высказыванием обоснованных математических суждений, использованием математики для удовлетворения потребностей человека.</p>
	<p>Авторы концепции математической грамотности считают, что понимание роли математики в мире выражается способностью человека выделить, сформулировать и решить математические проблемы, которые возникают в различных областях и различных ситуациях, связанных с живой и неживой природой, социальными и культурными условиями проживания. Поэтому в исследовании учащимся предлагаются в основном не типичные учебные математические задачи, характерные для проверочных и экзаменационных работ в российской школе, а близкие к реальным проблемные ситуации, требующие для своего решения различных подходов (см. приложение 4, задания «Скорость гоночной машины», «Жилой дом», «Площадь континента»).</p>
Компоненты математической грамотности	<p>В составе математической грамотности выделены два основных компонента:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- «фундаментальные математические идеи»,</li> <li>- «математическая компетентность».</li> </ul>
	<p>Фундаментальные математические идеи – это группа взаимосвязанных общих математических понятий, которые связаны с реальной действительностью тем, что характеризуют свойства, общие для разнообразных объектов и явлений живой и неживой природы, и тем самым способствуют лучшему пониманию роли математики в</p>

<sup>7</sup> Это определение хорошо согласуется с высказыванием Леонтьева А.А. «Функционально грамотный человек – это человек, который способен использовать все постоянно приобретаемые в течение жизни знания, умения и навыки для решения максимально широкого диапазона жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений» [5, ст. 35]

постижении и описании окружающей действительности. В качестве таких идей предложены: «изменение и зависимости», «пространство и форма», «неопределенность», «количественные рассуждения». В исследовании ПИЗА 2000 года задания концентрировались вокруг двух фундаментальных идей: «изменение и зависимости», «пространство и форма» (см. приложение 4, задания «Яблони» и «Жилой дом»). Так, в связи с выбором последней из этих идей около трети математических заданий, включенных в международный тест, были составлены на геометрическом материале.

При отборе содержания, хотя и не в первую очередь, учитывается также необходимость отразить каждую из основных «тем» традиционного школьного курса математики: числа, измерения, оценка, алгебра, функции, геометрия, вероятность, статистика, элементы теории чисел. Отметим, что в рамках этих тем значительное внимание уделено ряду вопросов, имеющих высокую практическую значимость (измерение геометрических величин, оценка, прикидка результатов, проценты, масштаб, интерпретация диаграмм и графиков реальных зависимостей, вероятность, статистические показатели и др.).

Очевидно, что успешность выполнения задания существенно зависит от предложенной в нем ситуации. Предлагаются четыре типа ситуаций, связанных: с личной жизнью (школьной, домашней (см. приложение 4, задание «Жилой дом»), на отдыхе), обучением (см. «Треугольники»), профессиональной деятельностью (см. «Яблони»), общественной жизнью (местного общества, всего мира), наукой (см. «Площадь континента»). Предпочтение отдано ситуациям, которые представляют интерес для учащихся и обеспечивают возможность комплексной проверки выделенных знаний и умений, то есть требуют использовать знания и умения из различных тем и разделов курса математики, а в некоторых случаях и из других учебных предметов (например, физики, географии, биологии, см. «Скорость гоночной машины», «Площадь континента») или внешкольных источников информации.

Второй основной компонент математической грамотности – «математическая компетентность». Компетентность определяется как «сочетание математических знаний, умений, опыта и способностей человека», обеспечивающих успешное решение различных проблем, требующих использования математики. Это понятие раскрывается следующим образом: «наиболее общие математические способности и умения, включающие математическое мышление, математическую аргументацию, постановку и решение математической проблемы, математическое моделирование, использование различных форм представления математических объектов и ситуаций, использование математического языка, коммуникативные умения (письменная и устная математическая речь), использование современных технических средств (различных инструментов, компьютеров и других технических средств, связанных с информационными технологиями)» [23, 29].

Для разработки заданий различной сложности выделены три уровня математической компетентности. Первый уровень включает

воспроизведение математических фактов, методов и выполнение вычислений, второй – установление связей и интеграцию материала из разных математических тем, необходимого для решения поставленной проблемы, третий – математические размышления, требующие обобщения и интуиции.

Для проверки достижения первого уровня компетентности в основном предлагаются традиционные учебные задачи, характерные и для проверочных работ в российской школе. При этом требуется знание математических фактов, воспроизведение определений математических объектов и их свойств, применение стандартных (простых и достаточно сложных) алгоритмов и методов решения, работа с формулами, выполнение вычислений. Так как способы решения в основном стандартные, то запись самого решения не представляет интереса, и поэтому используются задания двух типов – с выбором ответа и с кратким свободным ответом, когда ответ дается в виде числа, выражения, слова, а решение не приводится (см. задания: «Скорость гоночной машины», вопросы 2, 3; «Жилой дом», вопрос 1; «Треугольники»).

Второму уровню компетентности присущи умения устанавливать связи между различными темами программы по математике и интегрировать информацию, необходимую для решения задачи. От учащихся требуется самостоятельно выбрать соответствующий метод решения и необходимые математические инструменты. Ситуации, рассматриваемые в задачах, должны быть нестандартными, но не требовать высокого уровня математизации.

Достижение второго уровня компетентности проверяется с помощью решения несложных жизненных задач. В них, в отличие от заданий, отвечающих первому уровню, не сразу видно, на материале какой темы составлена данная задача, какой метод или алгоритм надо использовать для ее решения, а также возможны различные подходы к решению (см. задания: «Жилой дом» вопрос 2; «Яблони» вопросы 1, 2; «Скорость гоночной машины», вопросы 1, 4).

Для проверки достижения третьего уровня компетентности разрабатываются более сложные задачи, в которых, прежде всего, необходимо «математизировать» предложенную ситуацию. Эта процедура состоит из двух этапов: выделение проблемы, которая решается средствами математики, и ее формулировка; разработка соответствующей математической модели, решение и его интерпретация согласно предложенной в задании ситуации (см. «Яблони», вопрос 3).

Материалы исследования показывают, что для решения некоторых заданий, отвечающих третьему уровню компетентности, надо владеть достаточно сложными математическими знаниями и умениями (например, составить и решить квадратное уравнение, линейное и квадратное неравенства, составить рекуррентную формулу числовой последовательности, распознавать арифметическую и геометрическую прогрессии и использовать для решения задач формулы  $n$ -члена и суммы  $n$  членов этих последовательностей, использовать теоремы сложения и умножения вероятностей).

Очевидна иерархичность уровней компетентности, т.е. задания

Типы  
математи-  
ческих  
заданий

второго уровня сложнее первого, а третьего уровня – сложнее двух первых. Задания третьего уровня отличаются от знакомых математических задач, характерных для заданий первого и в некоторых случаях второго уровня компетентности, и требуют для своего решения не только прочных технических навыков, но и высокого математического развития, интуиции, логического мышления и т.п.

Для проверки компетентности учащихся используются три известных типа заданий: с выбором ответа; с кратким свободным ответом, когда ответ четко ограничен условием задачи по содержанию и форме (обычно дается в виде числа, последовательности чисел или букв, выражения, рисунка, слова и т.п.), с развернутым свободным ответом. Во многих заданиях информация предлагается в форме различных таблиц, диаграмм, графиков, рисунков, схем.

Два первых типа заданий использовались для проверки более простых знаний и умений. Наиболее сложные умения проверялись с помощью заданий третьего типа, когда от учащего требовалось записать полное решение или обоснование полученного ответа. Содержание этих заданий позволяло учащимся дать решения, различающиеся по развернутости, обобщенности, сложности использованных методов и т.п., что позволяло им продемонстрировать различные уровни математической компетентности. На выполнение таких заданий в 2000 году было отведено около трети времени, выделенного на оценку математической подготовки школьников.

Значительный интерес представляет еще один тип заданий, предлагаемых в исследовании – так называемые «структурированные вопросы». Эти задания состояются из нескольких вопросов различного типа, относящихся к одной и той же ситуации. Как правило, они располагаются по возрастанию сложности. Чаще всего сначала даются вопросы с выбором ответа или с кратким ответом, а в конце – вопросы с развернутым ответом. Примером «структурированных» вопросов являются три вопроса, включенных в задание «Яблони». На эти вопросы можно ответить, используя различные способы решения.

Структурированные вопросы не только позволяют дифференцировать учащихся по уровню компетентности, но используются также для проверки умения учиться, самостоятельно приобретать знания. В связи с этим содержание вопросов подбирается таким образом, чтобы в процессе их последовательного выполнения учащиеся получали некоторые «подсказки», необходимые для выполнения последних наиболее сложных вопросов, которые требуют некоторого обобщения (например, составления общей формулы некоторого процесса или явления).

### 3.3 Оценка выполнения заданий

Выполнение заданий с выбором ответа и с кратким ответом оценивается по трем категориям: верно, неверно, не приступал к выполнению. При оценке ответов учащихся на задания с развернутым ответом вместо привычных категорий «верный ответ» и «неверный ответ» используются категории «ответ принимается полностью»,

Как  
оценивалось  
состояние  
математи-  
ческой  
грамотности.  
Трудность  
задания.

«ответ принимается частично», «ответ не принимается». Этот подход объясняется тем, что на некоторые вопросы не имеется единственно верного ответа как такового, а также тем, что в некоторых случаях категория «ответ принимается полностью» не обязательно включает только полный верный или идеальный ответ. Указания по оценке выполнения каждого задания сформулированы таким образом, что позволяют распределить ответы учащихся на три группы, различающиеся по степени, с которой ученик демонстрирует понимание текста задания и проверяемого им учебного материала, способность ответить на предложенный вопрос.

Анализ требований, которые сформулированы в указаниях по оценке ответов, приводит к выводу о том, что исследователи на первое место ставят выявление попытки учащегося любыми средствами хотя бы частично разрешить предложенную ситуацию. При этом гораздо меньшее значение придается характеру и корректности использования математических методов, а также корректности и полноте приведенных в решении рассуждений и выкладок.

Выполнение учащимся всей группы математических заданий, включенных в вариант теста, оценивается по 1000-балльной международной шкале со средним значением, равным 500, и стандартным отклонением, равным 100. Результаты выполнения учащимися тестовых заданий позволили организаторам исследования охарактеризовать (в терминах соответствующих знаний и умений) виды математической деятельности, характерной для различных уровней данной 1000-балльной шкалы. С этой целью каждому математическому заданию (вопросу) присваиваются по упомянутой выше 1000-балльной шкале баллы, которые определяются на основе результатов выполнения данного задания учащимися, участвовавшими в исследовании. Затем содержание и способы решения группы заданий, имеющих близкие балловые оценки (например, 650-750), используются для характеристики подготовки учащихся, балловые оценки которых за выполнение всех математических заданий теста близки к балловым оценкам данной группы заданий [20].

При оценке на уровне 750 баллов и выше учащиеся демонстрируют активный и продуктивный подход в решении предложенных в исследовании задач. Они успешно распознают и формулируют предложенную в условии проблему на математическом языке, справляются с достаточно сложными задачами и могут выполнить несколько последовательных шагов решения. При этом учащиеся могут распознать и применить соответствующие инструменты и знания (часто в случае новой для них ситуации), проявить интуицию при определении соответствующего способа решения, интегрировать знания из разных разделов математики и других предметов, использовать обобщение, рассуждения, аргументацию для объяснения полученного ответа, то есть демонстрируют познавательную деятельность высокого уровня. Примером такой задачи является вопрос 3 к заданию «Яблони» (см. рис. 3.1).

При оценке около 570 баллов по этой шкале учащиеся обычно

интерпретируют и связывают между собой информацию, представленную в различной форме, или из разных источников; могут использовать предложенную модель рассматриваемой ситуации, которая нередко дается в алгебраической или другой формализованной форме; могут проверить правильность предложенных утверждений или моделей. Учащиеся успешно работают с предложенными способами решения, моделями или планами (например, сделав соответствующий выбор из них); выбирают и применяют соответствующие математические знания, если решение задачи состоит из небольшого числа шагов. Примером такой задачи является вопрос 2 к заданию «Яблони».

На нижнем конце данной шкалы при оценке около 380 баллов учащиеся обычно могут выполнить только какой-нибудь один вид деятельности, состоящий в применении базовых математических фактов или методов, или выполняют несложные вычисления. Они могут распознать информацию, представленную в форме знакомой диаграммы или знакомого текста, в котором явно и просто сформулирована или легко определяется математическая задача. Решение предполагает применение стандартного способа, состоящего из одного шага. Примером такой задачи является вопрос 2 в задании «Скорость гоночной машины» (см. рис. 3.2).

Рис. 3.1 Задание по математике «Яблони» и вопросы к нему. Расположение задания на международной шкале трудности заданий.

## ЯБЛОНИ

Фермер на садовом участке высаживает яблони в форме квадрата, как показано на рисунке. Для защиты яблонь от ветра он сажает по краям участка хвойные деревья.

Ниже на рисунке изображены схемы посадки яблонь и хвойных деревьев для нескольких значений  $n$ , где  $n$  – количество рядов высаженных яблонь. Эту последовательность можно продолжить для любого числа  $n$ .

$n = 1$

```
X X X
X ● X
X X X
```

$n = 2$

```
X X X X X
X ● ● X
X      X
X ● ● X
X X X X X
```

$n = 3$

```
X X X X X X X
X ● ● ● X
X      X
X ● ● ● X
X      X
X ● ● ● X
X X X X X X X
```

$n = 4$

```
X X X X X X X X X
X ● ● ● ● X
X      X
X ● ● ● ● X
X      X
X ● ● ● ● X
X      X
X ● ● ● ● X
X X X X X X X X X
```

X - хвойное дерево

● - яблоня



### ВОПРОС 3

#### ЯБЛОНИ

Предположим, что фермер решил постепенно увеличивать число рядов яблонь на своем участке. Что при этом будет увеличиваться быстрее: количество высаживаемых яблонь или количество хвойных деревьев?

Запишите объяснение своего ответа.

#### 1 балл (трудность – 723)

- Верный ответ (число ЯБЛОНЫ) сопровождается верным обоснованием, и ученик дает алгебраическое обоснование, используя формулы  $n$ -го члена последовательностей ( $n^2$  и  $8n$ ).

1000

750

### ВОПРОС 2

#### ЯБЛОНИ

В рассмотренной выше последовательности количество посаженных яблонь и хвойных деревьев подсчитывается следующим образом:

количество яблонь =  $n^2$ ,

количество хвойных деревьев =  $8n$ ,

где  $n$  – число рядов высаженных яблонь.

Для какого значения  $n$  число яблонь будет равно числу посаженных вокруг них хвойных деревьев? Запишите решение.

#### 1 балл (трудность – 655)

При получении верного ответа ( $n = 8$ ) - явно использован алгебраический метод решения,

- явно не показан алгебраический метод решения или решение не дано вовсе,

- использован другой метод, например, с помощью продолжения числовой последовательности или последовательности рисунков.

570

### ВОПРОС 1

#### ЯБЛОНИ

Заполните таблицу:

$n$	Количество яблонь	Количество хвойных деревьев
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

#### 1 балл (трудность – 548)

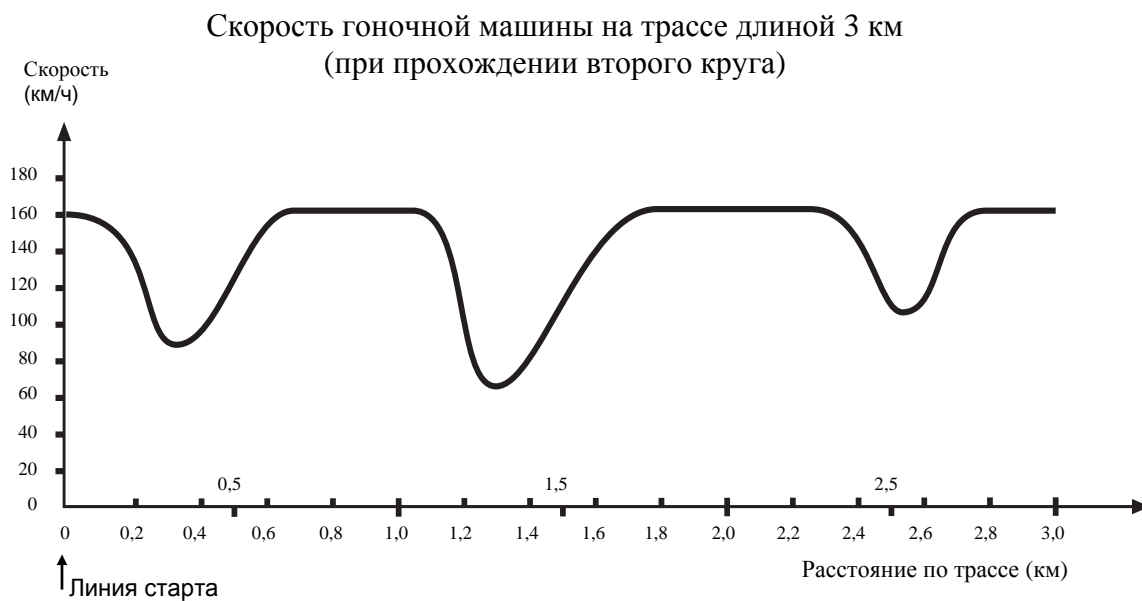
- Все 7 значений в таблице указаны верно.

380

Рис. 3.2 Задание по математике «Скорость гоночной машины» и вопросы к нему. Расположение задания на международной шкале трудности заданий.

### СКОРОСТЬ ГОНОЧНОЙ МАШИНЫ

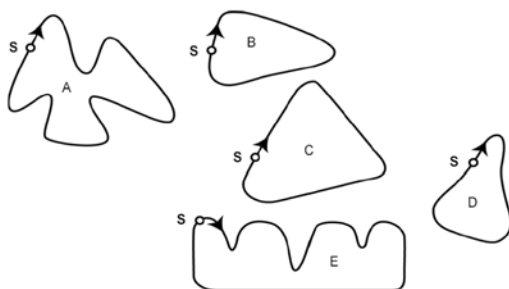
На графике показано, как изменялась скорость гоночной машины, когда она проходила второй круг по трёхкилометровой кольцевой трассе без подъёмов и спусков.



## ВОПРОС 4

### СКОРОСТЬ ГОНОЧНОЙ МАШИНЫ

Ниже изображены пять различных по форме гоночных трасс. По какой из этих трасс ехала гоночная машина, график скорости которой приведен ранее?



S - линия старта

1 балл (трудность – 655)

- Ответ В.

1000

750

## ВОПРОС 1

### СКОРОСТЬ ГОНОЧНОЙ МАШИНЫ

Чему примерно равно расстояние от линии старта до начала самого длинного прямолинейного участка трассы?

- A. 0,5 км
- B. 1,5 км
- C. 2,3 км
- D. 2,6 км

1 балл (трудность – 492)

- Ответ В: 1,5 км.

570

## ВОПРОС 3

### СКОРОСТЬ ГОНОЧНОЙ МАШИНЫ

Что можно сказать о скорости машины при прохождении трассы между отметками 2,6 км и 2,8 км?

- A. Скорость машины оставалась постоянной.
- B. Скорость машины увеличивалась.
- C. Скорость машины уменьшалась.
- D. По данному графику невозможно определить изменение скорости машины.

1 балл (трудность – 413)

- Ответ В – «Скорость машины увеличивалась».

## ВОПРОС 2

### СКОРОСТЬ ГОНОЧНОЙ МАШИНЫ

В каком месте трассы скорость машины была наименьшей при прохождении второго круга?

- A. На линии старта.
- B. Примерно на отметке 0,8 км.
- C. Примерно на отметке 1,3 км.
- D. Примерно посередине трассы.

1 балл (трудность – 403)

- Ответ С – «Примерно на отметке 1,3 км».

380

### 3.4 Характеристика математических заданий и результаты их выполнения

Анализ содержания заданий показал, что идеи, заложенные в предложенные задачи, реализуют объявленные в исследовании цели – оценку уровня математической компетентности учащихся и умения учиться, самостоятельно приобретать знания в процессе выполнения некоторой деятельности. Действительно, в них дается описание некоторой в большей или меньшей степени близкой к жизни ситуации, в которой содержится проблема, которую надо разрешить средствами математики. Например, вычислить площадь пола чердака дома, вычислить площадь континента, распознать изображенный на рисунке план жилой комнаты, вычислить длину шага человека и скорость его движения.

В ряде задач представлены ситуации, для решения которых необходима интеграция знаний из смежных дисциплин, в частности, из физики, географии. Например, при определении «формы» гоночной трассы или при интерпретации особого вида диаграмм («возрастных пирамид населения»). Успешное выполнение этих заданий зависит от умения «аккумулировать», делать собственным достоянием и применять в нужных случаях знания, полученные из различных школьных предметов или из внешних источников информации.

Несколько заданий состоят из описания некоторой ситуации и трех-четырех взаимосвязанных между собой вопросов, относящихся к этой ситуации (см. приложение 4, задания «Скорость гоночной машины», «Яблони»). При этом требуется обобщить информацию, полученную при выполнении начальных вопросов, которые содержат определенные подсказки, облегчающие ответ на последний, самый сложный, вопрос. Эти задания позволяют проверить умение учащихся самостоятельно приобретать знания в процессе выполнения запрограммированной познавательной деятельности – решения предложенного набора математических задач повышающейся сложности.

Для выполнения этих заданий требуется относительно небольшой объем знаний и умений, которые формируются в российской основной и старшей школе. В то же время применить эти знания надо в ситуациях, которые существенно отличаются по своему содержанию и форме от привычных учебных заданий различной сложности, которые предлагаются 15-летним учащимся России.

Из 31 вопроса, которые предлагались к 16 заданиям, разработчики отнесли:

- к первому уровню компетентности - 10;
- ко второму уровню - 19;
- к третьему - 2.

Использованы три формы составления этих заданий:

- с выбором ответа из четырех альтернатив - 10;
- с кратким ответом (в виде числа, рисунка) - 12;
- с развернутым ответом (запись решения и объяснения) - 9.

Необходимо отметить, что задания, отвечающие разным уровням компетентности, различаются по сложности, которая существенным

Что  
необходимо  
знать и уметь  
математи-  
чески  
грамотному  
современному  
человеку

образом зависит от содержания курсов математики и акцентов на формирование тех или иных знаний и умений в странах-участницах исследования. Поэтому уровень компетентности, соответствующий заданию, на самом деле может различаться для разных стран. Это справедливо и для России. Например, задания «Жилой дом» (вопрос 2), «Площадь континента» для российских учащихся следует явно отнести не ко второму, а к третьему уровню компетентности.

Знакомство с содержанием заданий показывает, что большинство из них не относятся к типичным задачам любого уровня сложности, которые, согласно особенностям обучения математике в России, предлагаются на уроках и при контроле математической подготовки 15-летних учащихся.

Анализируя содержание задач с точки зрения математических фактов и математических методов, необходимых для их решения, следует отметить, что большинство из них соответствует программе российской школы. Исключение составляют только некоторые задачи. Так, 15-летние учащиеся не имеют достаточно полных представлений об особенностях стереометрических фигур, которые формируются в 11 классе, а учащиеся этого возраста, обучающиеся в 9 классе, не знакомы с диаграммами такого вида как пирамиды населения (10 класс, курс географии), а также с графиками кусочных функций.

Часть заданий вряд ли можно отнести к математическим задачам. Например, работа с планами расположения каких-либо пространственных объектов на местности (задание «Вид комнаты») согласно программе по математике не входит в содержание математической подготовки российских учащихся. Планы местности и находящихся на ней строений составляются на уроках географии в 5-6 классах. Задача, в которой надо представить конфигурацию на основе изображения ее вида спереди и вида сзади, скорее характерна для уроков черчения.

Первый и четвертый вопросы задания «Скорость гоночной машины» скорее относятся к физике, а не математике. К сожалению, и на уроках физики учащиеся не встречаются с подобными задачами.

В проведенном международном исследовании несложно выделить относительно небольшой объем математических знаний и умений, которые разработчики посчитали необходимыми для математически грамотного современного человека. К ним отнесены: пространственные представления; пространственное воображение; свойства пространственных фигур; умение читать и интерпретировать количественную информацию, представленную в различной форме (в форме таблиц, диаграмм, графиков реальных зависимостей), характерную для средств массовой информации; умение работать с формулами; знаковые и числовые последовательности; нахождение периметра и площадей нестандартных фигур; действия с процентами; использование масштаба; использование статистических показателей для характеристики реальных явлений и процессов; умение выполнять действия с различными единицами измерения (длины, массы, времени, скорости) и др. К сожалению, формированию этих практико-ориентированных знаний и умений, а также применению их в близких к реальным ситуациям, которые отличаются от привычных учебных

	<p>ситуаций, в российской основной школе не уделяется должного внимания.</p> <p>Таким образом, анализ содержания заданий позволил до начала проведения исследования прогнозировать невысокий уровень их выполнения учащимися России.</p> <p>Охарактеризуем содержание некоторых предложенных заданий, знания и умения, на проверку которых они нацелены, и приведем результаты их выполнения.</p>
Задание «Треуголь- ники»	<p>1) Треугольники (см. приложение 4)</p> <p>Данное задание отнесено к первому уровню компетентности. Приведено математическое описание некоторой геометрической фигуры (треугольника), которую надо на основе этого описания выбрать из нескольких данных фигур. Эта несложная чисто математическая задача, не связанная ни с какой практической ситуацией. От учащихся требуется соотнести сведения о свойствах фигуры, описанные в условии словесно и с помощью математических терминов, с соответствующими элементами визуальной информации, представленной на чертежах, изображающих несколько стандартных геометрических фигур, и выбрать из них фигуру, отвечающую этим свойствам. Задача соответствует первому уровню компетентности и требует знания математических терминов и интеграции информации, представленной в различной форме. Несмотря на невысокую сложность задания, его выполнили только 61% российских учащихся. В большинстве стран результаты не выше российских, лучше всего ответили японские учащиеся – 72%.</p>
Задание «Площадь континента»	<p>2) Площадь континента (см. приложение 4)</p> <p>Задание отнесено ко второму уровню компетентности. Требуется найти приближенное значение площади нестандартной фигуры – континента Антарктида, изображенного на карте. Эта задача может быть без сомнения отнесена к задачам, позволяющим оценить компетентность учащихся. Действительно, выбирая самостоятельно наиболее предпочтительный для себя путь, ученик средствами математики должен разрешить поставленную перед ним проблему. Задача допускает различные способы решения. От учащегося требуется выбрать геометрическую фигуру(ы), которую можно использовать в качестве модели при определении площади нестандартной фигуры. Например, использовать круг, прямоугольник(и) или треугольник(и), а затем с помощью формул площадей этих фигур найти площадь континента. При этом надо проявить умение находить длины соответствующих отрезков, используя масштаб карты, выполнять соответствующие подсчеты.</p> <p>Неточность при измерении длин соответствующих отрезков на карте, использование масштаба карты при определении реальной длины сторон стандартных геометрических фигур, с помощью которых определяется площадь нестандартной фигуры, приводит даже при верном способе решения к значительному разбросу результатов, полученных учащимися. Поэтому в рекомендациях по оценке ответов учащихся предусмотрительно указан достаточно большой интервал допустимых числовых значений площади, принадлежность к которому свидетельствует о выборе верного</p>

Задание  
«Скорость  
гоночной  
машины»

способа решения. Достаточно «мягкие» критерии оценки ответов позволяют выделить учащихся, способных тем или иным способом решить поставленную проблему, даже в том случае, если они допускают ошибки в измерении отрезков или, используя масштаб карты, ошибаются при вычислении реальной длины этих отрезков. Подобные задачи не предлагаются в российской школе. Не удивительно, что ее решили только 9% российских учащихся. Задача оказалась не менее сложной и для учащихся всех других стран, наилучшие результаты в Финляндии – 18%, в Японии – 11%.

3) Скорость гоночной машины (4 вопроса) (см. приложение 4)

Вопросы 2-ой и 3-ий отнесены к первому уровню, а 1-ый и 4-ый – ко второму уровню компетентности. Задача «многофункциональная» и очень интересная. На рисунке изображен график изменения скорости на втором круге гоночной автомобильной трассы. Требуется интерпретировать информацию о физической зависимости величин (расстоянии и скорости машины, которая движется по неизвестной траектории). Информация, которую ученик получает при ответе на три первых вопроса, является в то же время некоторой подсказкой для получения ответа на последний вопрос. Восприятие и обобщение этой информации позволяют характеризовать умение учащихся учиться, самостоятельно приобретать знания, необходимые для выполнения других задач.

Второй и третий вопросы относительно наименьшей скорости и характера изменения значений скорости на определенных участках трассы на первый взгляд являются стандартными и характеризуют владение собственно предметными (математическими) умениями «читать» график зависимости величин (функции). Второй вопрос на самом деле является стандартным для российских учащихся, и на него ответили 77%.

Третий вопрос только на первый взгляд кажется стандартным. Дело в том, что на промежутке пути, который указан в качестве верного ответа, скорость изменяется не монотонно – она сначала возрастает, а потом становится постоянной. Тем не менее, верным считается ответ «скорость возрастает». На этот вопрос ответили 66% учащихся России. Очевидно, что разработчики задания рассчитывали на стандартное мышление, при котором учащиеся обратят внимание только на характер изменения скорости в начале указанного промежутка, когда скорость возрастает. Поэтому не удивительно, что более вдумчивые учащиеся, безусловно, затруднились ответить на этот вопрос. Этот вывод подтвержден специальным исследованием, проведенным психологами [11].

Первый вопрос, в котором надо определить расстояние от старта до наибольшего прямолинейного участка трассы, требует, кроме умения «читать» график, некоторых знаний из физики, позволяющих по изменению скорости движения определить форму участка трассы (возрастание скорости показывает прямолинейный участок, резкое убывание скорости – поворот). На этот вопрос ответили 69% российских учащихся.

Для ответа на 1-ый и 4-ый вопросы учащиеся должны определить по форме кривой данного графика форму трассы, по которой едет

Задание  
«Яблони»

машина. Учитывая, что в условии говорится, что на трассе нет ни подъемов, ни спусков, которые влияют на изменение скорости, можно сделать вывод о том, что участки графика, на которых скорость снижается, показывают скорость на поворотах, имеющих на трассе. В то же время участки, на которых скорость начинает возрастать, а также участки, на которых скорость постоянна, являются прямолинейными участками трассы. Тогда нетрудно увидеть, что на трассе имеются три поворота и три прямолинейных участка, из которых наибольшую протяженность имеет участок, который расположен на промежутке (1,4 – 2,4).

Однако для ответа на 1-ый вопрос о расстоянии до самого длинного прямолинейного участка трассы достаточно просто визуально сравнить только горизонтальные участки графика и нетрудно увидеть, что средний из них (1,4 – 2,4) – самый большой. В связи с этим невозможно утверждать, что 69% учащихся, которые верно ответили на данный вопрос, действительно глубоко проанализировали условие и сам график скорости и сделали правильное заключение о форме участков трассы. Справедливость этого утверждения подтверждают не только очень низкие результаты (18%) выполнения последнего вопроса, в котором надо было по графику скорости выбрать форму трассы из пяти предложенных вариантов, но и выбор более чем половиной учащихся (54%) неверной формы, которая внешне похожа по форме на кривую самого графика скорости (см. приложение 4, ответ, обозначенный буквой Е, к 4-му вопросу «Скорость гоночной машины»).

Последний вопрос – о форме гоночной трассы – характеризует высокий уровень компетентности ученика, требует, кроме математической подготовки, определенной подготовки по физике. Необходимо понимать и интерпретировать графическое представление зависимости двух величин (скорости и расстояния) и соотнести его с реальным физическим явлением – движением машины по некоторой трассе. Анализ нескольких предложенных форм трассы и соотнесение их с графиком изменения скорости на ее участках (увеличение, уменьшение, сохранение постоянной), позволяет сделать осознанный выбор формы. Вопрос явно нестандартный для российских учащихся, отсюда невысокий процент ответов – 18%. Задание оказалось трудным и для учащихся большинства стран, самый высокий результат в Японии – 54%.

4) Яблони (3 вопроса) (см. приложение 4)

Первые два вопроса отнесены ко второму уровню компетентности, третий вопрос – к третьему уровню. В условии этой задачи практическая ситуация представлена в словесной и графической формах. Так, на схемах в знаковой форме изображено количество яблонь и окружающих их хвойных деревьев для некоторых значений размеров сада:  $n = 1, 2, 3, 4$ , где  $n$  – число рядов высаженных яблонь.

В первом вопросе требуется заполнить таблицу, указав в ней количество каждой из этих пород деревьев при  $n = 2, 3, 4, 5$ . Учащиеся должны связать словесное и графическое описание ситуации с таблицей и, используя предложенную математическую модель практической ситуации, определить закономерность каждой из двух



последовательностей (количества яблонь и количества хвойных деревьев).

Задачу можно решить различными методами. Например, алгебраическим.

Так, изменения количества яблонь и хвойных деревьев при изменении размеров сада описываются двумя функциями – квадратической ( $y = n^2$ ) и линейной ( $y = 8n$ ). Эти формулы можно вывести самостоятельно, опираясь на схемы, которые приведены в условии задачи. Можно также воспользоваться явной «подсказкой», имеющейся в условии второго вопроса, где приведены обе формулы.

В то же время можно воспользоваться и другим методом – подсчитать число деревьев, изображенных на четырех схемах, и заполнить четыре строки таблицы. Затем либо «увидеть» зависимость между числами каждого из столбцов таблицы, либо изобразить еще одну схему сада для случая  $n = 5$  и заполнить последнюю строку таблицы. Задачу решили 51% российских учащихся, примерно такие же результаты в большинстве стран. Лучший результат в Японии – 81%.

В условии 2-го вопроса приведены формулы общих членов последовательностей количества яблонь и хвойных деревьев. От учащихся требуется интерпретировать информацию, содержащую слова и символы, связать между собой информацию о зависимостях изменения числа деревьев, выраженную в различной форме (схем, таблицы и алгебраических выражений). Затем надо найти способ, который позволит определить, при каком условии обе функции (линейная и квадратическая) будут иметь одинаковые значения.

Задача допускает различные способы решения, например, алгебраический (составить и решить квадратное уравнение  $n^2 = 8n$ ) или с помощью метода «проб и ошибок» подобрать соответствующее значение  $n$ . Затем надо записать решение, приводя соответствующие пояснения, преобразования и вычисления. Нестандартная ситуация, представленная в задаче, затруднила российских учащихся, ее решили только 38%. В большинстве других стран результаты не выше. Лучше всех справились с задачей учащиеся Кореи – 61%.

В третьем вопросе требуется показать глубокое понимание понятий линейной и квадратической функций, сравнив изменение их значений при увеличении значений переменной  $n$ . Для этого надо информацию, полученную при выполнении двух первых вопросов, использовать в новой ситуации. Вывод о сравнении значений двух функций надо обосновать, записав соответствующую аргументацию. Возможны разные способы решения. Например, составить и решить алгебраически соответствующее квадратное неравенство или сравнить значения линейной и квадратической функций, опираясь на их свойства, или использовать метод «проб и ошибок».

Вопросы к заданию «Яблони» действительно позволяют зафиксировать достижение учащимися различных уровней компетентности. Успешные ответы на первый и второй вопросы, для решения которых требуется связать между собой информацию, представленную в различной форме, при наличии практической ситуации, позволяют зафиксировать достижение второго уровня

компетентности. При ответе на третий вопрос требуется самостоятельно создать математическую модель ситуации, разработать метод решения (составить и решить квадратическое неравенство), математически и логически грамотно записать полученное решение и обоснование. Выполнение этого вопроса позволяет зафиксировать достижение третьего уровня компетентности.

В нем требовалось определить, каких деревьев будут высаживать больше – яблонь или хвойных при увеличении числа рядов яблонь ( $n$ ). Для решения этой задачи надо было интегрировать информацию, полученную при выполнении двух первых вопросов, использовать полученные факты в новой ситуации, создать модель этой ситуации и найти способ решения. Российские учащиеся, решившие задачу, использовали только один способ – составление и решение квадратного неравенства ( $n^2 > 8n$ ). По этому вопросу был показан очень низкий результат – 5% верных ответов.

Отметим двоякую роль, которую выполняют приведенные в условии задания схемы садовых участков. При недостаточной подготовке учащихся эти схемы, помогая ответить на первый вопрос, провоцируют учащихся на неверный ответ на третий вопрос. Дело в том, что на них рассмотрены ситуации для количества рядов яблонь, меньших 8, при которых число хвойных деревьев больше числа яблонь, хотя с увеличением количества рядов яблонь ( $n > 8$ ) число яблонь становится больше. Ответы российских учащихся, свидетельствуют, что некоторые из них давали неверный ответ, опираясь на эти схемы [11]. Нестандартная ситуация, предложенная в задании, несмотря на подсказки, присутствующие в условии двух первых вопросов, оказалась не по силам большинству учащихся России. Отметим, что задача оказалась слишком сложной и для учащихся всех других стран. Самый высокий результат в Корее – 24%, в Гонконге – 14%, в Японии – 11%, в остальных странах результаты ниже.

### **3.5 Обобщенные результаты выполнения математических заданий**

Интерпретируя результаты проведенного исследования, следует иметь в виду, что изучение математической грамотности не являлось его основной целью. Поэтому учащимся было предложено только 16 математических заданий, которые включали всего 31 вопрос. При этом каждый ученик отвечал только на 14-16 вопросов. Очевидно, что результаты их выполнения не позволяют достаточно полно оценить математическую подготовку 15-летних учащихся России. Тем не менее, несоответствие этой подготовки некоторым международным требованиям выявилось достаточно явно.

При анализе результатов необходимо учитывать, что сложность многих заданий международного теста может быть неодинаковой для учащихся разных стран. Это подтверждают результаты выполнения российскими учащимися заданий, отнесенных разработчиками к разным уровням компетентности, определяющим сложность задания:

первый уровень (11 вопросов) – 38% – 77%;

Каковы  
простран-  
ственные  
представле-  
ния  
российских  
учащихся

второй уровень (19 вопросов) – 6% – 76%;  
третий уровень (2 вопроса) – 5% и 6%.

В случае выполнения заданий первого и второго уровней значительный разброс результатов подтверждает вывод о том, что предполагаемая разработчиками сложность задания в разных странах существенно зависит от особенностей содержания обучения и акцентов в обучении.

Рассмотрим более подробно выполнение некоторых групп заданий, в которых предложенные задачи сходны по характеру умений, которые надо актуализировать при их решении. Сравним результаты России с результатами других стран. При сравнении выполнения заданий используем проценты верных ответов, показанные российскими учащимися, и средние проценты верных ответов, показанные учащимися всех стран ОЭСР, участвовавших в исследовании, а также наибольший процент выполнения заданий, показанный той или иной страной. Отметим, что наибольший процент выполнения почти всех заданий показан учащимися одной из трех стран: Японии, Кореи, Финляндии.

### **Пространственные представления**

Развитие пространственных представлений учащихся проверяется пятью заданиями различной сложности. При их выполнении от учащихся не требовалось воспроизведения какого-либо математического факта или формулы. Для ответа на предложенные вопросы надо было представить (вообразить), какой вид имеет та или иная недоступная для наглядного восприятия часть пространственной формы или мысленно трансформировать данную форму.

Отметим, что в целом с этими заданиями учащиеся справились лучше, чем можно было прогнозировать на основе результатов предварительного тестирования.

В задании «Вид комнаты» на рисунке изображена комната, в которой расположена мебель, и приведены четыре плана этой комнаты. Расположение мебели на этих планах имеет ориентацию, отличную от приведенной на рисунке комнаты, что значительно затрудняет выбор верного ответа. Сумели распознать план изображенной комнаты 74% российских учащихся, что примерно равно среднему проценту по странам ОЭСР (далее будем его обозначать ср.%), равному 73%, а наилучший результат показали учащиеся Японии – 81%.

Окрашенный снаружи куб разрезают плоскостями, параллельными его основанию, на три слоя, состоящие из единичных кубиков. Один из вопросов проверяет понимание сущности процесса измерения объема пространственной фигуры, когда требуется определить число единичных кубиков, из которых состоит данная фигура. Ученики должны сообразить, что нужно либо применить известную им формулу  $V=a^3$ , где  $a=3$ , либо, например, просто пересчитать единичные кубики, используя рисунок. Вопрос непривычный для учащихся России, поэтому не удивительно, что на него ответили 61%, но и все страны в целом выполнили его не лучше – ср.% = 61%. Самый высокий результат – в Японии (81%).

Как  
российские  
учащиеся  
справляются с  
вычисле-  
ниями

Ответили на самый трудный вопрос (определить число кубиков с тремя окрашенными гранями) 47% российских учащихся (ср.% = 36%, Япония – 50%). Этот вопрос характерен для российских школьных олимпиад. Российские учащиеся ответили на него примерно на уровне лучшего результата, показанного в Японии. Невысокий процент верных ответов объясняется тем, что не так просто представить, что при разрезании окрашенного куба параллельными плоскостями кубики с тремя окрашенными гранями будут находиться только в его вершинах.

Результаты существенно ниже при выполнении нестандартного задания, где по изображенным на рисунке видам фигуры спереди и сзади, на которых была не видна часть данной фигуры, надо было определить ее конфигурацию и подсчитать число деталей различного размера, из которых она была сложена. Затем, используя заданные числовые соотношения между разными по размеру деталями, заменить более крупные детали самыми мелкими. Правильно подсчитать число самых маленьких деталей, которые понадобятся, чтобы сложить данную фигуру, сумели только 34% российских учащихся (ср.% = 37%, Япония – 56%). Невысокие результаты, скорее всего, объясняются затруднениями, которые возникли у учащихся при определении вида этой нестандартной фигуры. Подобные задания характерны скорее для уроков черчения и не используются при обучении математике.

Таким образом, задания, в которых не требовалось иметь высоко развитых пространственных представлений, выполнены на удовлетворительном уровне. В более сложных случаях, когда требуются более развитые пространственные представления, результаты, как и следовало ожидать, значительно ниже.

#### **Вычисления (формулы для выполнения вычислений в условии не приводятся, их надо выбрать самостоятельно)**

Учащимся были предложены 4 задания (см. приложение 4, задания «Жилой дом», «Площадь континента»). В каждом из них для вычисления некоторой величины надо было самостоятельно выбрать математические факты, которые можно использовать для решения поставленной задачи. Отметим, что российским учащимся известны эти факты.

Умеют вычислить:

- площадь квадратной комнаты («Жилой дом», вопрос 1), используя формулу площади квадрата, 55% (ср.% = 56%, Япония – 81%).

- длину стороны бетонного блока, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда («Жилой дом», вопрос 2), используя теорему о средней линии треугольника, 67% (ср.% = 59%, Япония – 85%).

- периметр нестандартных фигур, заменив каждую из них соответствующим прямоугольником и используя формулу подсчета его периметра, а также сравнить периметры параллелограмма и прямоугольника, у которых равные высоты и одна из сторон, 24% (ср.% = 20%, Япония – 42%).

- площадь нестандартной фигуры («Площадь континента», см. приложение 4), приближенно заменив ее некоторой стандартной фигурой (круг, прямоугольник, квадрат, треугольник) или разбив ее на несколько стандартных фигур, использовать формулы подсчета площадей этих фигур, учитывая при вычислениях масштаб карты, 9% (ср.% = 10%, Финляндия – 18%).

Результаты рассмотренных выше заданий, в условии которых не указаны готовые формулы для подсчета значений нужной величины, явно невысокие. По заданию «Жилой дом» они частично объясняются тем, что часть 15-летних учащихся еще не встречались с трехмерными изображениями сложных геометрических конфигураций (прямоугольный параллелепипед вписан в пирамиду). Однако гораздо труднее для российских учащихся составить модель нестандартной практической ситуации («Площадь континента» и др.) и, пользуясь этой моделью, выбрать соответствующие теоретические факты и формулы, необходимые для разрешения проблемной ситуации. Самые низкие результаты (9%) показаны при оценке площади нестандартной фигуры – площади Антарктиды (см. «Площадь континента»). Это неудивительно, так как данная ситуация является совершенно новой для российских учащихся. Отметим, что учащиеся всех других стран показали низкие результаты – ср.% = 10%, самый высокий процент выполнения в Финляндии – 18%, в Японии и Корее – 11%.

#### **Анализ и интерпретация информации, представленной в виде графиков**

Как  
российские  
учащиеся  
умеют  
работать с  
графиками  
реальных  
зависимостей

Компетентность учащихся при работе с представленной графически информацией проверялась с помощью 6 заданий. Охарактеризуем результаты выполнения этих заданий.

Практика работы школы свидетельствует, что учащиеся обычно показывают достаточно высокие результаты при выполнении стандартных заданий, в которых явно указывается на необходимость «прочитать график» и сделать заключение о наличии или отсутствии тех или иных свойств некоторой функции (например, указать область определения, множество значений, промежутки знакопостоянства и т.п.). Однако только некоторые вопросы в указанных тестовых заданиях можно отнести к стандартным. В остальных вопросах не предлагается в явном виде извлечь информацию о функции, график которой изображен на рисунке. В большинстве из них на основе представленной на графике информации об изменении значений некоторых величин требуется сделать вывод о свойствах других величин, связанных с ними определенной зависимостью. Например, на основе характера изменения скорости движения машины на отдельных участках трассы надо определить форму трассы, по которой она ехала (см. «Скорость гоночной машины»), или на основе графика зависимости высоты уровня воды от времени при заполнении водой некоторой емкости выбрать из предложенных вариантов форму этой емкости.

Итоги выполнения рассмотренных заданий приводят к выводу о том, что большинство учащихся России справляются со стандартной ситуацией: по значению аргумента (расстоянию) могут найти

соответствующее значение функции (наименьшую скорость машины) 77% российских учащихся (ср.% = 83%, Корея – 91%); на основе значений функции (скорости машины) на промежутке могут сделать вывод о характере ее изменения на этом промежутке (скорость увеличивается, уменьшается и т.п.) – 66% (ср.% = 82%, Япония – 88%). По значению функции могут восстановить значение аргумента (см. «Скорость машины», вопрос 1) – 69% (ср.% = 66%, Япония – 82%).

Результаты снижаются при сравнении двух графиков, показывающих изменение среднего роста девочек и среднего роста юношей в течение нескольких лет в одной из стран. Правильно сравнили эти графики и определили, в каком возрасте рост девочек в среднем больше роста юношей такого же возраста, 51% российских учащихся (ср.% = 83%, Корея – 91%). При этом только 38% российских учащихся показали умение перевести графическую информацию в аналитическую, указав особенности изменения формы графика среднего роста девочек, которые позволяют утверждать, что рост девочек замедляется после достижения ими определенного возраста.

Вопрос относительно изменения формы графика явно позволяет зафиксировать различные уровни компетентности учащихся, так как допускает ответы, основанные на использовании математических понятий и математического языка (например, учащиеся сослались на уменьшение угла наклона графика к оси абсцисс) или повседневного языка (например, указали, что «кривая линия становится более плавной»). На этот нестандартный вопрос ответили 38% учащихся России. Он оказался непростым и для учащихся других стран – ср.% = 47%. Наилучший результат в Финляндии – 65%, а в Японии – 45%.

Самые низкие результаты у российских учащихся (8%) при выполнении задания, в котором надо было выбрать форму контейнера на основе графика кусочной функции, характеризующей изменение высоты воды при заполнении данного контейнера водой. Контейнеры имели разную форму: цилиндра, конуса и сложной конфигурации двух фигур – куба и усеченной пирамиды. Одна из причин невысоких результатов заключается в том, что с графиками кусочных функций российские учащиеся знакомятся в 10-11 классах. Кроме того, для ответа на вопрос надо было иметь некоторое представление об особенностях пространственных фигур и их конфигурации, которые представлены в задании. Эти фигуры (цилиндр, конус, усеченная пирамида) изучаются в 11 классе, поэтому многие 15-летние учащиеся были не знакомы с этим материалом.

Данное задание оказалось трудным и для учащихся других стран – ср.% = 11%, самый высокий процент выполнения – в Японии (23%).

#### **Анализ и интерпретация информации, представленной на диаграммах**

Рассмотрим результаты выполнения заданий, в которых информация представлена в виде разного вида диаграмм: столбчатой диаграммы и пирамиды населения. Последний вид диаграмм изучается в 10 классе на уроках географии, поэтому части российских 15-летних учащихся этот материал незнаком.

Как  
российские  
учащиеся  
умеют  
анализиро-  
вать  
диаграммы

На рисунке изображены четыре возрастные пирамиды населения некоторой страны, на которых зафиксировано распределение населения этой страны по возрасту и полу в разные годы, и указана величина единицы масштаба (1 деление = 100000 человек).

Два первых вопроса – стандартные, в них требуется найти на определенной диаграмме нужную группу населения и определить ее численность, т.е. применить умение «читать» данные на той или иной диаграмме и провести некоторые вычисления, учитывая масштаб. С ними справились 61% и 54% российских учащихся соответственно. Примерно такие же средние результаты в других странах – ср.% = 59% и ср.% = 50%, лучшие результаты – в Финляндии (71% и 68% соответственно).

Эти два вопроса содержат некоторую подсказку для ответа на явно более сложный последующий вопрос.

Приведем текст этого вопроса: «Согласно данным, представленным на пирамидах, только часть возрастной группы 0-4 года в 1950 году проживет 85 лет и более. Какой наибольший процент может составить эта часть?». Для разрешения предложенной в нем ситуации требуется найти процентное соотношение между численностью двух групп населения, указанных на двух разных диаграммах, т.е. в условии прямо говорится о том, какой метод решения надо использовать. Задача усложнена тем, что требуется определить, на какой диаграмме надо определить численность населения 85-летнего возраста, и как вычислить «наибольший процент», которую составит эта группа населения по отношению к возрастной группе 0-4 лет в 1950 году. На этот сложный нестандартный вопрос ответили всего 6% российских учащихся. Но и в других странах результаты не намного выше – ср.% = 8%. Лучший результат – в Японии (15%).

В последнем вопросе требуется определить истинность четырех утверждений относительно характера изменения численности групп населения в различные годы. Для этого нужно графическую информацию перевести в аналитическую и провести сравнение двух и более диаграмм. Приведем одно из этих утверждений: «Данные, представленные на пирамидах населения, свидетельствуют о том, что, начиная с 1990 года и далее, женщины живут дольше мужчин». От учащихся требуется умение анализировать и содержательно интерпретировать графическую информацию, выявив тенденцию изменения данных, представленных на нескольких диаграммах. Вне сомнения, данный вопрос позволяет оценить компетентность учащихся в переводе одного вида информации (графическую) в другой (аналитической). Верно определили истинность (ложность) четырех утверждений 49% российских учащихся, средний процент по странам – ср.% = 51%, лучший результат – в Японии (62%).

При анализе данных, представленных на двух столбцах столбчатой диаграммы, затруднения учащихся вызваны непривычным для них изображением только верхней части этих столбцов. Кроме того, на вертикальной оси диаграммы выбрана слишком большая единица измерения, что спровоцировало российских учащихся признать существенным различие между данными, изображенными на этих

Умеют ли  
российские  
учащиеся  
учиться в  
процессе  
решения  
задач

столбцах. Правильно обосновать имевшее место отсутствие различия сумели только 6% российских учащихся. Результаты по данному заданию невысоки и во всех других странах (ср.%=12%). Самый высокий результат показали учащиеся Гонконга (25%), затем Финляндии (19%), Японии (15%), в остальных странах процент выполнения ниже.

Низкие результаты выполнения этого задания российскими учащимися частично объясняются тем, что тема «Анализ данных», в рамках которой должны решаться подобные задачи, не являлась обязательной для изучения до 2003/2004 учебного года и пока не нашла соответствующей реализации в школьных учебниках.

### **Умение учиться**

Значительный интерес представляют результаты выполнения российскими учащимися последних вопросов трех заданий («Скорость гоночной машины» – 18%, «Пирамиды населения» – 6%, «Яблони» – 5%), которые проверяли умение учиться, приобретая знания в процессе выполнения группы взаимосвязанных вопросов повышающейся сложности. Низкие результаты по этим вопросам показали не только учащиеся России, они оказались трудными для 15-летних учащихся большинства стран ОЭСР. Средний процент выполнения этих заданий по этим странам: ср.%=28%, ср.%=8%, ср.%=9% соответственно, а наилучшие результаты по этим заданиям – в Японии (54%), Японии (15%), Корее (24%) соответственно.

Эксперимент, проведенный психологами в московской школе №91, которая давно работает по программе Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова, убедительно свидетельствует, что умению учиться, т.е. воспринимать информацию и переносить свои знания в новую ситуацию, нужно целенаправленно обучать. Ученики школы №91, которых согласно указанной программе этому учили, показали результаты значительно выше по сравнению с результатами учащихся российских школ, участвовавших в исследовании ПИЗА [11].

В заключение отметим, что в заданиях, которые можно решить разными методами (применением алгебраических методов, или арифметических, или методом подбора), российские учащиеся используют, где это возможно, только алгебраический метод и при объяснении полученного ответа используют математический язык. В то же время многие учащиеся других стран использовали метод «проб и ошибок», а при записи объяснений – язык повседневного общения.

### **3.6 Сравнение результатов тестирования**

#### **15-летних российских учащихся и учащихся других стран**

В 2000 году исследование ПИЗА проводилось в 32 странах, включая Россию. При сравнении стран не учитывались результаты Нидерландов.

В качестве основной количественной характеристики математической грамотности учащихся конкретной страны использован средний балл, подсчитанный по результатам выполнения математической части работы всеми учащимися этой страны. Существенно лучше других стран выполнили математические задания



Место России среди стран-участниц	<p>международного теста учащиеся Японии и Кореи.</p> <p>Все страны, участвовавшие в исследовании, проводили сравнение своих результатов со средним баллом стран-членов ОЭСР, характеризующим состояние математической грамотности учащихся этих стран в целом. В итоге все страны, участвовавшие в исследовании (всего 31 страна), распределились на три группы (см. таблицу 3.3):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 15 стран, результаты которых статистически значимо выше среднего балла стран ОЭСР: Япония, Корея, Новая Зеландия, Финляндия, Австралия, Канада, Швейцария, Великобритания, Бельгия, Франция, Австрия, Дания, Исландия, Лихтенштейн*, Швеция;</li> <li>- 4 страны, результаты которых статистически не отличаются от среднего балла стран ОЭСР: Ирландия, Норвегия, Чешская Республика, США;</li> <li>- 12 стран (в них входит Россия), результаты которых статистически значимо ниже среднего балла стран ОЭСР: Германия, Венгрия, Российская Федерация*, Испания, Польша, Латвия*, Италия, Португалия, Греция, Люксембург, Мексика, Бразилия*.</li> </ul> <p>В 2002 году международные тесты, использовавшиеся в исследовании ПИЗА-2000, были проведены еще в 10 странах и их результаты сравнивались с результатами 2000 года. Из этих стран результаты значимо выше не только по сравнению с Россией, но и со всеми остальными странами показали учащиеся Гонконга. Остальные 9 стран (Израиль, Таиланд, Болгария, Аргентина, Чили, Албания, Македония, Индонезия, Перу) показали результаты значимо ниже результатов учащихся России.</p> <p>Попарное сравнение среднего балла России со средними баллами других стран позволило определить ее позицию по отношению к каждой стране, участвовавшей в исследовании 2000 и 2002 годов. Эти данные представлены в приведенной ниже таблице.</p>
-----------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

---

\* страны, не являющиеся членами ОЭСР.

Таблица 3.1<sup>8</sup>

Распределение стран по отношению к результатам учащихся России  
по математической грамотности (2000 и 2002 гг.)

Страны, результаты которых значимо выше результатов России (18 стран)	Страны, результаты которых статистически не отличаются от результатов России (7 стран)	Страны, результаты которых значимо ниже результатов России (15 стран)
<i>Гонконг</i> Япония Корея Новая Зеландия Финляндия Австралия Канада Швейцария Великобритания Бельгия Франция Австрия Дания Исландия Лихтенштейн Швеция Ирландия Норвегия	Чешская Республика США Германия Венгрия Испания Польша Латвия	Италия Португалия Греция Люксембург <i>Израиль</i> <i>Таиланд</i> <i>Болгария</i> <i>Аргентина</i> Мексика <i>Чили</i> <i>Албания</i> <i>Македония</i> <i>Индонезия</i> Бразилия <i>Перу</i>

Кроме сравнения результатов России с другими странами на основе средних баллов, характеризующих подготовку всей выборки учащихся каждой страны, представляет интерес провести сравнение на основе процентилей, характеризующих подготовку групп учащихся, показавших самые высокие и самые низкие результаты, как это было сделано при описании состояния «грамотности чтения».

Для сравнения были выбраны следующие страны: Япония (находится среди стран, занявших 1–4 места), Финляндия и Канада (находятся среди стран, занявших 5–8 места). Соотношение между результатами указанных стран иллюстрирует диаграмма, представленная на рис. 3.1. Значения процентилей по этим странам, а также по группе всех стран-членов ОЭСР в целом приведены в следующей таблице.

<sup>8</sup> В таблицу 3.1 включены страны, которые проводили исследования ПИЗА в 2002 г., используя тот же инструментарий и процедуры. Данные страны выделены курсивом.

Таблица 3.2

Результаты выполнения заданий по математике,  
соответствующие различным процентилям

Страны	Средний балл	Баллы, соответствующие процентилям					
		5-й процентиль	10-й процентиль	25-й процентиль	75-й процентиль	90-й процентиль	95-й процентиль
Япония	557 (5,5) <sup>9</sup>	402 (11,2)	440 (9,1)	504 (7,4)	617 (5,2)	662 (4,9)	688 (6,1)
Финляндия	536 (2,2)	400 (6,5)	433 (3,6)	484 (4,1)	592 (2,5)	637 (3,2)	664 (3,5)
Канада	533 (1,4)	390 (3,2)	423 (2,5)	477 (2,0)	592 (1,7)	640 (1,9)	668 (2,6)
ОЭСР ср.	500 (0,7)	326 (1,5)	367 (1,4)	435 (1,1)	571 (0,8)	625 (0,9)	655 (1,1)
Россия	478 (5,5)	305 (9,0)	343 (7,4)	407 (6,6)	552 (6,6)	613 (6,8)	648 (7,8)

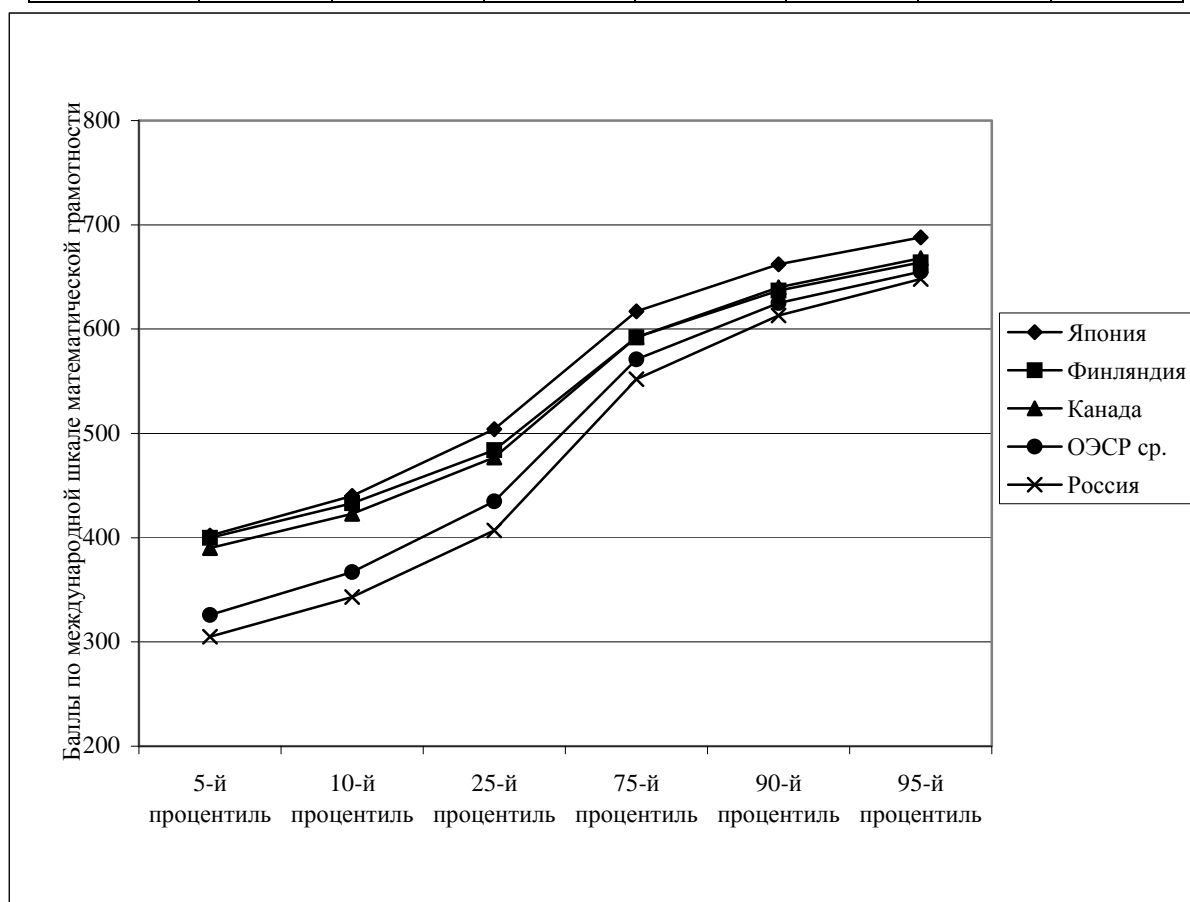


Рис. 3.1 Результаты группы учащихся России и некоторых стран по математической грамотности (по процентилям)

Эти данные показывают, что для всех значений процентилей существуют различия, которые уменьшаются при переходе от 5-го к 95-му процентилю.

Наибольшие различия между результатами России и трех указанных стран наблюдаются для менее подготовленных учащихся (5-ый, 10-ый и 25-ый процентилям). Эти различия существенно ниже для 75–95-го процентилей. Отметим, что 5% (начиная с 95-го процентиля) наиболее подготовленных российских учащихся показали результаты на уровне 5% лучших учащихся Финляндии и

<sup>9</sup> В скобках указана стандартная ошибка измерения

10% лучших  
российских  
учащихся не  
уступают 10%  
лучших  
учащихся  
стран ОЭСР

Канады, но ниже этой же группы учащихся Японии и соответственно трех других стран (Гонконга, Кореи, Новой Зеландии), занявших 1 – 4 места. Таким образом, 5% российских лучших учащихся по уровню математической грамотности, которая оценивается в данном исследовании, не уступают 5% лучших учащихся Финляндии и Канады, но, к сожалению, не дотягивают до уровня 5% наиболее подготовленных учащихся четырех лучших стран.

По сравнению с указанными выше странами различия результатов России со средними результатами всех стран-членов ОЭСР значительно ниже, однако продолжают оставаться существенными до 75-го перцентиля. При этом 10% наиболее подготовленных российских учащихся по уровню математической грамотности не уступают 10% наиболее подготовленных учащихся всех стран-членов ОЭСР.

В тоже время математическая грамотность российских слабо подготовленных учащихся (5–25-ый перцентили) намного ниже по сравнению с указанными выше лучшими странами. Эти различия значительно ниже при сравнении с 5–25-ым перцентилями всей выборки учащихся стран-членов ОЭСР, хотя и продолжают оставаться существенными.

Отметим, что результаты проведенного исследования явно отражают различие приоритетов в математическом образовании стран-участниц. Об этом свидетельствуют итоги сравнения результатов двух международных проверок (ПИЗА и ТИМСС), проводившихся с разными целями. В отличие от цели ПИЗА (подготовка к взрослой жизни) в ТИМСС (1995 и 1999 годы) проверялось овладение учащимися 8 класса основными вопросами содержания школьного курса математики. При этом среди стран, результаты которых в исследовании ПИЗА существенно выше российских (см. таблицу 3.1), большинство (кроме Японии, Кореи, Бельгии) показали результаты либо такие же, либо ниже российских в исследовании ТИМСС. В то же время восьмиклассники Чешской Республики и Венгрии (страны, в которых высокий уровень математического образования) подобно российским школьникам показали низкие результаты в исследовании ПИЗА и высокие результаты в исследованиях ТИМСС [4, 7, 13, 30].

### **3.7 Основные выводы**

Изучение математической грамотности не являлось основной целью исследования ПИЗА-2000. Однако несоответствие математической подготовки российских учащихся некоторым международным требованиям выявилось достаточно явно, что позволило сделать следующие выводы.

1. Математическая подготовка 15-летних учащихся в основном дает возможность выполнить задания международного теста. В российской основной школе изучаются математические факты и математические методы, необходимые для решения большинства задач, включенных в международные тесты. Некоторые необходимые сведения о пространственных фигурах, возрастных диаграммах населения и графиках кусочных функций учащиеся получают в 10-11

Почему  
невысоки  
результаты  
российских  
учащихся

классах.

2. Невысокие результаты международных тестов можно объяснить несколькими причинами.

Почти все задачи были предложены в нестандартной для российских учащихся формулировке, которая значительно отличалась от учебных заданий, типичных для большинства российских действующих учебников. А именно, в этих задачах достаточно многословно описывалась некоторая близкая к реальной ситуация, которая могла включать факты и данные, не являющиеся необходимыми для решения поставленной проблемы. В ряде случаев задача была сформулирована таким образом, что учащиеся не могли отнести ее к какому-либо определенному разделу курса математики, чтобы для ее решения воспользоваться соответствующими теоретическими фактами. Не удивительно, что значительная часть учащихся затруднилась составить математическую модель подобных ситуаций.

Отдельные задачи требовали либо приближенных методов решения, использование которых не практикуется при обучении математике, либо для решения задачи требовалось выполнить только простейшие непосредственные вычисления, что зачастую смущало 15-летних учащихся России, которые, согласно программе обучения в основной и средней школе, имели дело с задачами, требовавшими для своего решения применения более сложных математических методов.

В некоторых случаях требовалось с учетом содержания задания интерпретировать полученное решение и отобрать ответ, отвечающий условию задачи. Невысокие результаты выполнения таких заданий в ряде случаев объясняются отсутствием у учащихся привычки к самоконтролю. В практике работы российской школы не обращается особого внимания на анализ полученного ответа при решении учебных заданий, так как в большинстве случаев этого не требуется в условиях искусственной учебной ситуации.

Для успешности выполнения заданий, предложенных в исследовании, а, следовательно, и для успешности во взрослой жизни очень важна установка на обязательное достижение цели – решение поставленной задачи любыми доступными средствами. Например, при отсутствии знания точного математического метода и соответствующих математических терминов использовать приближенный метод «проб и ошибок» и повседневную лексику. К сожалению, учащиеся России такой установки не имеют, так как она не считается приемлемой при обучении математике в российской школе.

3. В проведенном исследовании можно выделить относительно небольшой перечень знаний и умений, которые на международном уровне считаются необходимыми для современного математически грамотного человека. К ним, например, относятся: пространственные представления; умение читать и интерпретировать количественную информацию, представленную в различной форме; работа с формулами; знаковые и числовые последовательности; нахождение периметра и площадей нестандартных фигур; выполнение действий с процентами и др.

К сожалению, формированию этих практико-ориентированных знаний и умений в российской школе не уделяется должного внимания. Эти же знания и умения проверялись у учащихся 11 класса в рамках другого международного исследования (ТИМСС) в 1995 году. Результаты российских выпускников старшей школы были подобны результатам, показанным 15-летними учащимися в рамках исследования ПИЗА в 2000 году [2, 22].

Сравнение результатов России с результатами других стран явно показывает отличие приоритетов российского математического образования от других стран. Результаты международных сравнительных исследований (ТИМСС 1995 и 1999 гг.) [4, 7, 13, 30] свидетельствуют, что уровень предметных математических знаний и умений российских школьников не ниже или превосходит уровень учащихся большинства стран (Новая Зеландия, Финляндия, Австралия, Канада, Швейцария, Великобритания, Франция, Австрия, Дания, Исландия, Лихтенштейн, Швеция, Ирландия, Норвегия), которые в исследовании ПИЗА-2000 показали существенно лучшие результаты по состоянию математической грамотности, умению применять свои знания в близких к реальным ситуациям. Это говорит о том, что, обеспечивая российских учащихся значительным багажом знаний, российская система обучения математике не способствует формированию у них умения выходить за пределы учебных ситуаций, в которых формируются эти знания.

Невысокие результаты сравнительных международных исследований показали, что давно поставленная перед российской школой цель подготовить выпускников к свободному использованию математики в повседневной жизни в значительной степени не достигается на уровне требований международных тестов, проверяющих математическую грамотность. Одна из причин этого явления – академическая направленность школьного курса математики, которая привела к отсутствию должного внимания к практической составляющей содержания обучения в основной школе. Эта позиция отразилась и в содержании итоговой аттестации выпускников основной школы, которая проводится только по курсу алгебры 7-9 классов. Вследствие этого практическая направленность не реализуется в действующих учебниках для основной и средней школы, а также в проверочных и экзаменационных работах по курсам основной и средней школы.

Однако следует иметь в виду, что усвоения практических знаний явно недостаточно для приобретения математической компетентности, так как эти знания составляют только ее часть. Дело в том, что компетентность включает умение применить свои знания в ситуациях, отличных от тех, в рамках которых получены эти знания. К сожалению, многие российские учащиеся явно не смогли выйти за пределы привычных для них учебных ситуаций и применить свои немалые знания для решения многих далеко не сложных задач, включенных в международные тесты. Как показывают исследования психологов в области школьного образования, для приобретения этого умения необходима соответствующая методика обучения.

Математическая грамотность

Естественнонаучная грамотность Таблица 3.3

	Страны	Среднее значение по шкале математической грамотности				Страны	Среднее значение по шкале естественно-научной грамотности					
		Средн.	С.О.	Выс-шее	Низ-шее		Средн.	С.О.	Выс-шее	Низшее		
Страны, результаты которых статистически значимо выше средних результатов по странам ОЭСР	Япония	557	(5,5)	1	3	Страны, результаты которых статистически значимо выше средних результатов по странам ОЭСР	Корея	552	(2,7)	1	2	
	Корея	547	(2,8)	2	3		Япония	550	(5,5)	1	2	
	Новая Зеландия	537	(3,1)	4	8		Финляндия	538	(2,5)	3	4	
	Финляндия	536	(2,1)	4	7		Великобритания	532	(2,7)	3	7	
	Австралия	533	(3,5)	4	9		Канада	529	(1,6)	4	8	
	Канада	533	(1,4)	5	8		Новая Зеландия	528	(2,4)	4	8	
	Швейцария	529	(4,4)	4	10		Австралия	528	(3,5)	4	8	
	Великобритания	529	(2,5)	6	10		Австрия	519	(2,5)	8	10	
	Бельгия	520	(3,9)	9	15		Ирландия	513	(3,2)	9	12	
	Франция	517	(2,7)	10	15		Швеция	512	(2,5)	9	13	
	Австрия	515	(2,5)	10	16		Чешская Рес-ка	511	(2,4)	10	13	
	Дания	514	(2,4)	10	16		Страны, результаты которых статистически не отличаются от средних	Франция	500	(3,2)	13	18
	Исландия	514	(2,3)	11	16			Норвегия	500	(2,7)	13	18
	Лихтенштейн2	514	(7,0)	9	18			США	499	(7,3)	11	21
	Швеция	510	(2,5)	13	17			Венгрия	496	(4,2)	13	21
Страны, результаты которых не отличаются	Ирландия	503	(2,7)	16	19	Исландия		496	(2,2)	14	20	
	Норвегия	499	(2,8)	17	20	Бельгия		496	(4,3)	13	21	
	Чешская Рес-ка	498	(2,8)	17	20	Швейцария		496	(4,4)	13	21	
	США	493	(7,6)	16	23	Страны, результаты которых статистически значимо ниже средних результатов по странам ОЭСР	Испания	491	(3,0)	16	22	
Страны, результаты которых статистически значимо ниже средних результатов по странам ОЭСР	Германия	490	(2,5)	20	22		Германия	487	(2,4)	19	23	
	Венгрия	488	(4,0)	20	23		Польша	483	(5,1)	19	25	
	Россия2	478	(5,5)	21	25		Дания	481	(2,8)	21	25	
	Испания	476	(3,1)	23	25		Италия	478	(3,1)	22	25	
	Польша	470	(5,5)	23	26		Лихтенштейн2	476	(7,1)	20	26	
	Латвия2	463	(4,5)	25	28		Греция	461	(4,9)	25	29	
	Италия	457	(2,9)	26	28		Россия2	460	(4,7)	26	29	
	Португалия	454	(4,1)	26	29		Латвия2	460	(5,6)	25	29	
	Греция	447	(5,6)	27	30		Португалия	459	(4,0)	26	29	
	Люксембург	446	(2,0)	29	30		Люксембург	443	(2,3)	30	30	
	Мексика	387	(3,4)	31	31		Мексика	422	(3,2)	31	31	
	Бразилия2	334	(3,7)	32	32		Бразилия2	375	(3,3)	32	32	
	Нидерланды	-	-	1	4			-	-	3	14	

1. Коэффициент участия школ очень низок для обеспечения сравнения школ

2. Страны, не являющиеся членами ОЭСР