2. МАТЕМАТИКА

2.1. Характеристика контрольных измерительных материалов по математике 2007 года

В 2007 году перед Единым государственным экзаменом (ЕГЭ) по математике, как и в предыдущие годы, были поставлены две цели: обеспечить итоговую аттестацию выпускников по курсу алгебры и начал анализа 10-11 классов (курс В) и дифференциацию выпускников средней (полной) школы по уровню общей математической подготовки для отбора в вузы. Согласно этим целям в содержание проверки были включены вопросы, изучаемые в курсе В, а также те вопросы курса математики основной и старшей школы, которые включены в программу вступительных экзаменов по математике в вузы (проценты, прогрессии, сведения из курсов планиметрии и стереометрии и др.).

В рамках ЕГЭ проверялось усвоение только тех вопросов обязательного минимума содержания основных образовательных программ, которые разрешено контролировать к 2007 году. Так, например, не проверяются вопросы, включенные в раздел «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей». Получение достаточно полной и объективной информации о математической подготовке выпускников 2007 года обеспечивалось включением в варианты КИМ заданий, направленных на проверку достижения требований каждого из четырех основных тематических разделов стандарта: Числовые и буквенные выражения, Функции и графики, Начала математического анализа и Геометрия.

Сравнительный анализ результатов проведения ЕГЭ в 2001–2006 годы показал функциональную пригодность усовершенствованной модели составления вариантов контрольных измерительных материалов (КИМ), которая была использована в 2005–2006 гг., для проведения объективной итоговой аттестации и дифференциации по уровню математической подготовки выпускников общеобразовательных классов средней (полной) школы. Поэтому в 2007 году такая структура вариантов КИМ была сохранена: число заданий в работе (26), распределение их по трем частям (13 : 10 : 3), назначение, уровень сложности и типы заданий в каждой из этих частей, а также время выполнения работы (4 ч). [1]

Часть 1 (задания А1-А10, В1-В3) была направлена на проверку достижения выпускником уровня обязательной подготовки по курсу алгебры и начал анализа 10-11 классов (курс В) и, соответственно, содержала задания только базового уровня сложности. Успешного выполнения этих заданий было достаточно для получения положительной отметки «3».

Части 2 (задания В4-В11, С1, С2) и 3 (задания С3-С5) были направлены на обеспечение последующей дифференциации более подготовленных учащихся. В них были включены задания по алгебре и по геометрии повышенного и высокого уровней сложности, в пяти из них (С1-С5) требовалось записать полное решение. Результаты выполнения этих заданий позволяли не только выставить более высокие аттестационные отметки («4» и «5»), но и выявить тех выпускников, подготовка которых соответствует требованиям тех вузов, где математика изучается углубленно и интенсивно используется при изучении других предметов.

Ниже в таблице 2.1 представлено распределение контролируемого материала по основным блокам содержания в вариантах КИМ 2005–2007 гг.

---

[1] Обоснование структуры вариантов КИМ 2007 года и их более полное описание приведены в отчетах 2005 и 2006 гг.

Таблица 2.1

Распределение заданий по основным блокам содержания

Блоки содержания	Число заданий в работе		
	2005 г.	**2006 г.**	**2007 г.**
1. Выражения и преобразования	6	5	5
2. Уравнения и неравенства	6	7	9
3. Функции	10	10	8
4. Числа и вычисления	1	1	1
5. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин	3	3	3
Всего:	**26**	**26**	**26**

Конкретные вопросы содержания и виды деятельности (знания, умения), проверявшиеся в 2007 году, представлены в общем плане вариантов КИМ (см. Приложение 2.1). На основе общего плана было составлено несколько конкретных взаимозаменяемых планов для разработки различных вариантов КИМ. Параллельность вариантов работы обеспечивалась включением в нее взаимозаменяемых однотипных заданий, содержание, уровень сложности и расположение которых были определены в конкретном плане работы.

Проверка выполнения учащимися заданий с выбором ответа и с кратким числовым ответом была автоматизирована. За верное выполнение любого из этих заданий выставлялся 1 балл.

Выполнение заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности проверялось экспертной комиссией. В зависимости от полноты и правильности приведенного решения за выполнение заданий повышенного уровня сложности (С1 и С2) выставлялось от 0 до 2 баллов, высокого уровня сложности (С3-С5) от 0 до 4 баллов максимально.

Для обеспечения объективности оценки выполнения этих заданий были разработаны специальные рекомендации для региональных экспертов. Для каждого задания с развернутым ответом, помещенного в варианты КИМ-2007, в этих материалах предлагались: одно из возможных решений и конкретизированные критерии оценки его выполнения, которые учитывали полноту и правильность предложенного решения. Кроме того, в рекомендации были включены общие критерии для оценки заданий разной тематики и сложности: алгебраических заданий повышенного уровня (С1 и С2) и высокого уровня (С3 и С5), стереометрических задач высокого уровня (С4). Опыт проведения ЕГЭ показал, что использование общих и конкретизированных критериев помогало экспертам разработать объективные критерии оценки выполнения задания в тех случаях, когда учащийся приводил решение, отличное от предложенного в руководстве для экспертов.

Выполнение каждого задания С1-С5 оценивали независимо два эксперта. Если их оценки различались на 1 балл, то выставлялась большая из этих оценок, при различии в 2 балла выставлялась средняя оценка, при различии более 2 баллов окончательную оценку выставлял третий, наиболее опытный эксперт, которому сообщались оценки, выставленные двумя первыми экспертами.

2.2. Характеристика участников ЕГЭ по математике 2007 года

В 2007 году ЕГЭ по математике сдавали 605757[2] выпускников из 77 регионов России, что составило 52,89% всех выпускников средней (полной) школы в 2007 году. По сравнению с 2006 г. (около 48%) процент участников ЕГЭ в 2007 г. несколько выше.

Для сравнения ниже в таблице 2.2 приведено число участников ЕГЭ 2005–2007гг.

Таблица 2.2

Число участников экзамена

Пол	Число экзаменуемых			Процент экзаменуемых		
	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007
Девушки	391447	351774	339096	57,6%	56,4%	56,0%
Юноши	288707	271719	266661	42,4%	43,6%	44,0%
Всего	680154	623493	605757	100,0%	100,0%	100,0%

По сравнению с 2005 г. (69 регионов) и 2006 г. (73 региона) в 2007 г. (77 регионов) увеличилось число регионов, но при этом значительно уменьшилось общее число учащихся. Возможно, что одной из причин уменьшения количества участников ЕГЭ является увеличение числа регионов, в которых выпускники средней школы могут сами выбрать другую форму сдачи выпускного и вступительного экзаменов. Число учащихся в регионах варьировалось от 221 (Ненецкий АО) до 34308 (Краснодарский край). Значительные различия в числе участников ЕГЭ в регионах объясняются различием между числом выпускников средних школ, а также тем, что в ряде регионов в 2007 г. сдача экзамена по математике в форме ЕГЭ являлась обязательной для всех выпускников, а в остальных только часть учащихся, по своему желанию, выбрала эту форму.

Ниже в таблице 2.3 приведено распределение количества участников ЕГЭ 2005-2007 гг. по типам населенных пунктов.

Таблица 2.3

Распределение участников экзамена по типам населенных пунктов, в которых расположены образовательные учреждения

Тип населенного пункта	Число экзаменуемых			Процент экзаменуемых		
	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007
Не указан		5881	1		0,9%	0,0%
Населенный пункт сельского типа (село, деревня, хутор и пр.)	198136	167470	187657	29,1%	26,9%	31,0%
Населенный пункт городского типа (рабочий поселок, поселок городского типа и пр.)	58867	54029	48618	8,7%	8,7%	8,0%
Город с населением менее 50 тыс. человек	84740	76773	68728	12,5%	12,3%	11,4%
Город с населением 50-100 тыс. человек	56992	51831	51524	8,4%	8,3%	8,5%
Город с населением 100-450 тыс. человек	121102	106437	97075	17,8%	17,1%	16,0%
Город с населением 450-680 тыс. человек	70610	71315	64376	10,4%	11,4%	10,6%
Город с населением более 680 тыс. человек	89565	88662	86729	13,2%	14,2%	14,3%
г. Санкт-Петербург		189	72		0,0%	0,0%
г. Москва	142	906	977	0,0%	0,14%	0,16%
Всего	680154	623493	605757	100,0%	100,0%	100,0%

[2] По данным Федерального центра тестирования от 06.08.07.

Важно отметить, что постепенно увеличивается количество выпускников сельских школ, проходящих итоговую аттестацию в форме ЕГЭ, в 2007 они составили примерно треть участников, выпускники поселков городского типа – 8,0%. Остальные участники обучались в школах городского типа.

Ниже в таблице 2.4 приведено распределение участников экзамена по видам образовательных учреждений.

Таблица 2.4

Распределение участников экзамена по видам образовательных учреждений

Вид общеобразовательного учреждения	Число экзаменуемых			Процент экзаменуемых		
	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007
Общеобразовательные учреждения	660170	600286	587487	97,06%	96,28%	96,98%
Вечерние (сменные) общеобразовательные учреждения	11296	5251	6059	1,66%	0,84%	1,0%
Общеобразовательная школа-интернат	4288	4482	5181	0,63%	0,72%	0,86%
Кадетская школа	702	754	878	0,10%	0,12%	0,14%
Школа-интернат с первоначальной лётной подготовкой	405	444	350	0,06%	0,07%	0,06%
Образовательные учреждения начального профессионального образования	914	1478	1753	0,13%	0,24%	0,29%
Образовательные учреждения среднего профессионального образования	1665	3549	3071	0,24%	0,57%	0,51%
Нет данных	714	7249	978	0,10%	1,16%	0,16%
Всего	680154	623493	605757	100,0%	100,0%	100,0%

Как и в предыдущие годы, в 2007 году подавляющее большинство участников экзамена составили выпускники общеобразовательных школ – около 97%. Очевидно, что этот процент отражает действительный состав выпускников образовательных учреждений России. По остальным типам учебных учреждений не наблюдается существенных изменений.

При интерпретации результатов экзамена следует иметь в виду, что в тех регионах, где экзамен в форме ЕГЭ был обязательным или подавляющая часть выпускников выбрала эту форму, выборка участников экзамена является представительной, и выводы, сделанные на основе полученных результатов, можно с достаточным основанием распространять на всю совокупность выпускников средней школы данного региона (например, Краснодарский и Красноярский края, Самарская, Тамбовская и Челябинская области, Удмуртская республика и др.). В тех регионах, где экзамен в форме ЕГЭ сдавала по собственному выбору небольшая часть выпускников, выборка не является представительной (например, в Москве участвовали только 948 чел., в Башкирии – менее трети всех выпускников). Тем не менее, в целом число учащихся, сдававших экзамен по математике, составляло около 52,89% выпускников средних школ 2007 года в России. Это позволяет проявиться как положительным качествам, так и недочетам, характерным для математической подготовки данной совокупности учащихся.

2.3. Основные результаты экзамена по математике в 2007 году

Для характеристики общих результатов ЕГЭ по математике использовались ряды распределения тестовых оценок и аттестационных отметок, полученных

участниками экзамена за выполнение вариантов КИМ. Эти две оценки выставлялись каждому учащемуся с учетом норм, принятых Федеральной службой по надзору в сфере образования, на основе первичных баллов, полученных учащимися за выполнение заданий работы. Как и в 2005-2006 гг., за выполнение всех заданий работы в 2007 г. ученик мог получить максимально 37 первичных баллов (1х21 + 2х2 + 4х3= 37).

Тестовая оценка (ТБ – тестовый балл) характеризует общую математическую подготовку выпускника по курсам математики основной и средней школы. Она выставлялась по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Аттестационная отметка характеризует только усвоение материала курса алгебры и начал анализа 10-11 классов. Она выставлялась по используемой в школе пятибалльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение 22-х алгебраических заданий, составленных на материале данного курса (А1-А10, В1-В8, С1, С2, С3, С5). При этом не учитывалось выполнение 4 заданий (В9 – текстовой алгебраической задачи, составленной на материале курса алгебры основной школы, В10, В11, С4 – трех геометрических заданий).

Выявление тенденций в изменении состояния математической подготовки выпускников средних школ проводилось на основе сравнения рядов распределения этих оценок среди участников ЕГЭ в 2005–2007 г.г. Возможность непосредственного сравнения этих данных объясняется тем, что в эти годы были примерно одинаковыми несколько условий проведения ЕГЭ: достаточно большое число участников (более 600 тысяч), одинаковая структура работы, примерно одинаковые нормы выставления учащимся указанных выше оценок.

Ниже в таблице 2.5 и на рисунке 2.1 представлено распределение тестовых баллов, полученных участниками ЕГЭ в июне 2005–2007 гг.

Таблица 2.5

Распределение участников экзамена по полученным тестовым баллам

Год	Интервал шкалы тестовых баллов										Число участников
	0-10	**11-20**	**21-30**	**31-40**	**41-50**	**51-60**	**61-70**	**71-80**	**81-90**	**91-100**	
2005	2,03%	3,44%	10,45%	11,30%	22,94%	22,07%	16,96%	7,75%	2,84%	0,22%	680154
2006	0,40%	4,76%	4,51%	20,60%	23,12%	25,32%	14,22%	6,10%	0,80%	0,17%	623493
2007	0,43%	4,54%	11,94%	13,35%	25,58%	19,06%	15,15%	7,74%	2,04%	0,18%	605757

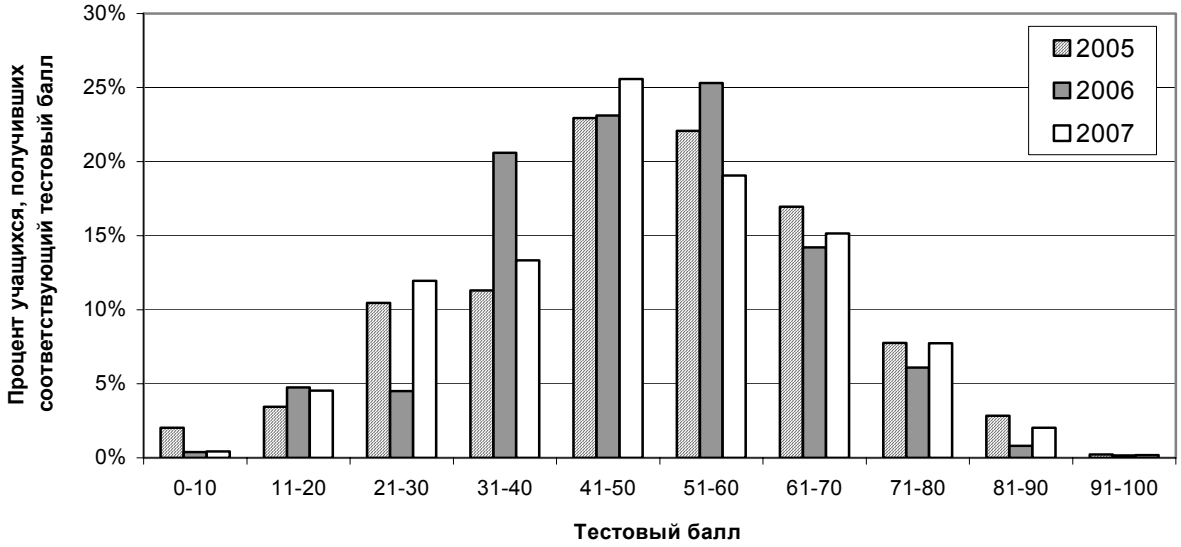


Рис. 2.1 Распределение участников экзамена по полученным тестовым баллам

Для выявления более явных тенденций в изменении состояния математической подготовки участников экзамена в 2005-2007 гг. сгруппируем результаты, представленные в таблице 2.5, разделив учащихся на 4 группы, показавшие значительно различающиеся уровни этой подготовки. Эти уровни определялись на основе тестовых оценок (ТБ), которые с учетом норм, принятых Федеральной службой по надзору в сфере образования, переводились затем по пятибалльной шкале в балловые оценки, характеризующие уровень общей математической подготовки участников ЕГЭ.

Ниже в таблице 2.6 представлены проценты участников экзамена, продемонстрировавших каждый из четырех выделенных уровней математической подготовки в 2005-2007 гг.

Таблица 2.6

Распределение участников экзамена по уровням математической подготовки

Отметка	Интервал тестовых баллов			Процент экзаменуемых		
	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007
2	0-37	0-37	0-35	21,6%	19,8%	20,9%
3	38-55	38-53	36-54	40,2%	39,5%	41,9%
4	56-74	54-71	55-73	31,3%	33,6%	29,6%
5	75-100	72-100	74-100	6,9%	7,1%	7,6%

Отметим, что в 2007 г. норма выставления положительной оценки «3» была повышена на 1 балл: в 2005-2006 гг. для её получения надо было выполнить не менее 6 заданий, в 2007 г. – не менее 7 заданий. При этом условии процент неудовлетворительных оценок по математике уменьшился по сравнению с 2005 г. на 0,7% и незначительно увеличился на 1,1% по сравнению с 2006 г., примерно на 2% увеличился процент положительных оценок «3». С учетом повышения нормы выставления оценки «3» можно констатировать, что наблюдается некоторая тенденция повышения уровня подготовки у части учащихся, входящих в группу слабо подготовленных выпускников. По сравнению в 2005 и 2006 гг. в 2007 г. на 1%-4% уменьшился процент учащихся, показавших хороший уровень общей математической подготовки, а процент учащихся, продемонстрировавших высокий уровень подготовки, незначительно, но постепенно повышался за 2005-2007 гг.

Ниже в таблице 2.7 представлены проценты участников экзамена, получивших различные аттестационные отметки, характеризующие усвоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов в 2005-2007 гг.

Таблица 2.7

Распределение участников экзамена по уровням алгебраической подготовки

Отметка	Интервал первичных баллов			Процент экзаменуемых		
	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007	ЕГЭ 2005	ЕГЭ 2006	ЕГЭ 2007
2	0-5	0-5	0-6	22,1%	20,0%	21,1%
3	6-11	6-11	7-12	35,0%	34,2%	35,7%
4	12-18	12-18	13-18	32,1%	34,0%	33,5%
5	19-30	19-30	19-30	10,9%	11,9%	9,7%

Отметим, что по сравнению с 2005-2006 гг. нормы выставления отметок «2», «3», «4» по алгебре были повышены на 1 балл (см. таблицу 2.17). При этом в 2007 году процент неудовлетворительных отметок несущественно (примерно на 1%) уменьшился по сравнению с 2005 г. и увеличился (примерно на 1,1%) по сравнению с 2006 г. В то же время в 2007 г. незначительно увеличился процент учащихся, показавших удовлетворительный уровень подготовки, и, соответственно, уменьшился процент учащихся, показавших качественную подготовку (получили отметки «4» и «5»). Таким образом, даже незначительное повышение норм выставления аттестационных отметок привело к некоторому изменению соотношения между положительными отметками. Это наблюдение указывает на нестабильный уровень подготовки выпускников по курсу алгебры и начал анализа 10-11 классов.

При интерпретации результатов ЕГЭ следует иметь в виду, что значительный процент учащихся, показавших неудовлетворительный или невысокий уровни подготовки, частично объясняется отсутствием положительной мотивации на овладение курсом математики у части выпускников, которым известно заранее, что при любом выполнении работы им обеспечена хотя бы минимальная положительная аттестационная отметка «3», или они не планируют поступать в вузы, где надо сдавать математику.

Сравнение результатов участников ЕГЭ 2007 по математике, различающихся типом и расположением образовательного учреждения, а также гендерными различиями, показали наличие связи между результатами выполнения вариантов КИМ и некоторыми из этих факторов.

а) Как и в 2005-2006 гг., выпускники общеобразовательных школ – средний тестовый балл 48,6 (2005 г. – 49,9 и 2006 г.– 49,1) значительно лучше справились с работой, чем учащиеся вечерних школ – средний тестовый балл 31,4 (2005 г. – 30,1 и 2006 г. – 34,7), которые в 2005–2007 гг. показали чрезвычайно низкий уровень математической подготовки. Непредставительные выборки участников экзамена, обучавшихся в других типах общеобразовательных учреждений, не позволяют провести подобные сравнения.

б) Как и в 2005-2006 гг., в целом результаты, показанные девушками – средний тестовый балл 48,8 (2005 г. – 50,3; 2006 г. – 49,1) и юношами – средний тестовый балл 47,9 (2005 г. – 48,9 и 2006 г. – 48,6), не имеют значимых различий.

в) Результаты, показанные выпускниками городских школ, как в 2005-2006 гг., с увеличением населения в городах постепенно и незначительно возрастают – средний тестовый балл в зависимости от численности населения находится в пределах в 2007 г. – 48,6-51,0 (2005 г. – 49,2-52,5; 2006 г. – 48,2-51,1).

Выпускники школ сельского типа – средний тестовый балл 44,7 (2005 г. – 46,4; 2006 г. – 46,5) в 2007 году показали результаты ниже результатов, показанных этой категорией учащихся в 2005-2006 гг., а также ниже результатов выпускников и городских школ, и поселков городского типа в 2005–2007 г.

Выпускники поселков городского типа – средний тестовый балл 48,6 (в 2005 г. – 48,3 и 2006 г. – 47,8) – показали результаты ниже, чем выпускники школ в городах с населением от менее 50 тыс. до 680 тыс. и более – средний тестовый балл 48,6-51,0 (2005 г. – 49,2-52,5 и 2006 г. – 48,7-51,1).

2.4. Анализ результатов выполнения экзаменационной работы по математике

Результаты выполнения вариантов КИМ показали существенные различия в состоянии математической подготовки выпускников старшей школы. Очевидно, что при анализе итогов экзамена значительный интерес представляет не только описание

на основе средних результатов состояния этой подготовки в целом у всех участников экзамена с присущими ей положительными моментами и основными недочетами. Наряду с этим важно получить информацию о состоянии подготовки более однородных по составу групп выпускников, являющихся частью этой выборки учащихся, например, у участников экзамена, продемонстрировавших различные уровни математической подготовки: «отличный», «хороший», «удовлетворительный», «неудовлетворительный».

Распределение участников экзамена на эти 4 группы проводилось на основе оценок («2», «3», «4», «5»), выставленных участникам экзамена на основе тестовых баллов, полученных ими за выполнение всех заданий работы. При этом овладение той или иной группой учащихся проверявшимся требованием фиксировалось в том случае, когда не менее 65% из них справлялись с решением задания, направленного на его проверку.

Результаты выполнения отдельных заданий этими группами учащихся в дальнейшем использованы для характеристики различий в уровне математической подготовки выпускников школы.

Подготовка учащихся характеризуется по следующим основным блокам содержания курса алгебры и начал анализа:

1. Выражения и преобразования;
2. Уравнения и неравенства;
3. Функции;
4. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин.

2.4.1. Анализ выполнения заданий по курсу алгебры и начал анализа (блоки 1-3)

В течение последних двух-трех лет содержание заданий базового уровня сложности в вариантах КИМ стабилизировалось. Экспериментально установлено достаточное число заданий разной тематики, выполнение которых позволяет объективно проверить состояние подготовки выпускников, в частности, создавая комфортные условия для проявления слабо подготовленными выпускниками своих достижений. Отзывы из регионов, получаемые ФИПИ, обзор печатных материалов в предметных журналах, отзывы общественности о содержании и уровне сложности заданий базового уровня в вариантах КИМ свидетельствуют о том, что эти задания, по мнению школьного математического сообщества, позволяют обеспечить проверку достижения уровня обязательной подготовки выпускниками средней школы. Это позволяет говорить о том, что в настоящий момент реально существует банк задач, составленных в ходе проведения эксперимента по введению ЕГЭ по математике, используя который можно проконтролировать достижение базового уровня математической подготовки выпускников. Опыт работы школы показал, что открытость требований к базовой подготовке и их конкретизация с помощью набора заданий, реализующих проверку достижения планируемых результатов обучения, дали возможность учителям активно использовать эти материалы при организации учебного процесса, в том числе, и при итоговом повторении курса алгебры и начал анализа.

Сравнение результатов выполнения заданий базового уровня сложности при проведении ЕГЭ за 2001-2007 гг. явно показало стабильность результатов выполнения участниками экзамена заданий базового уровня одной и той же тематической принадлежности, контролирующих одни и те же виды деятельности, а также повторяемость типичных ошибок учащихся. Представляло интерес выделить среди них менее подготовленных учащихся и определить, как они справляются с такими заданиями. Поэтому при анализе выполнения алгебраических заданий базового уровня

особое внимание было обращено на результаты, показанные учащимися, продемонстрировавшими «удовлетворительный» уровень алгебраической подготовки (за выполнение алгебраических заданий варианта КИМ получили отметку «3»). Это позволило определить образцы заданий, характеризующих достижение этих требований, а также определить доступность контролировавшихся на базовом уровне требований стандарта 2004 года для слабо подготовленных выпускников. Полученные образцы заданий должны стать для учителя математики важным ориентиром в подготовке выпускников, которые могут освоить математику на базовом уровне. В силу значимости данных образцов, полученных в ходе многолетнего эксперимента, в отчете они выделены в отдельное Приложение 2.2.

При выполнении заданий повышенного уровня особое внимание было обращено на результаты их выполнения наиболее подготовленными выпускниками, получившими за выполнение алгебраических заданий варианта КИМ отметку «5». Это позволило определить образцы заданий, характеризующих достижение требований стандарта на повышенном уровне.

2.4.1.1. Выражения и преобразования

Все варианты КИМ включали задания на тождественные преобразования выражений, содержащих корни, степени (с рациональными показателями), логарифмы, тригонометрические выражения. В каждую из трех частей работы были включены задания, в которых предполагалось проведение преобразований. Так, например, в заданиях базового уровня (Часть 1) проверялось владение каким-либо одним из изученных свойств выражений или правил действий с ними. Ученик должен был применить свойство (правило) для конкретных значений переменных и сделать вычисления. Причем условие задания явно указывало на вид математической деятельности, владение которым было необходимо продемонстрировать. В варианты КИМ было включено только одно задание повышенного уровня (Часть 2), где явно требовалось выполнить преобразования иррациональных выражений, логарифмов или степеней. Заметим, что при его выполнении ученик должен был интегрировать знания из двух разделов курса алгебры: проверялось умение преобразовать данное выражение и применить основное свойство арифметического квадратного корня (или корня четной степени). Кроме этого задания, еще в четырех других заданиях повышенного уровня преобразования различных видов выражений (тригонометрических, иррациональных, логарифмических) являлись одним из ключевых моментов решения задания. В вариантах КИМ были представлены преобразования всех видов выражений, изучаемых в старшей школе. Рассмотрим результаты выполнения заданий, содержащих преобразования различных выражений.

В заданиях базового уровня сложности проверялись основные свойства различных выражений:

– степенных (преобразование произведения и частного степеней с одинаковыми основаниями, степень степени),

– иррациональных (преобразования произведения и частного корней),

– логарифмических (преобразования суммы и разности логарифмов, основное логарифмическое тождество),

– тригонометрических (преобразования с использованием основного тригонометрического тождества, определение тангенса). Приведем в сводной таблице 2.8 результаты выполнения заданий базового уровня сложности на тождественные преобразования выражений (образцы заданий см. в Приложении 2.2).

Таблица 2.8

Средние проценты выполнения заданий базового уровня сложности на преобразование выражений

	Логарифмы	Тригонометрия	Степени	Корни
Общие результаты **2007** 2006	***Задание 3*** **77,5%;80,1%;81,5%** 79,5%, 80,8%	***Задание 11*** **52,9%; 54%** 40,7%,42,5%,45,5%	***Задание 1*** **76,5%;85,4%;86,4%** 74,2%; 88,9%	***Задание 2*** **72,7%;79%;85,4%** 75,%; 90,2%
Результаты получивших отметку «5» **2007** 2006	**99%, 100%, 100%** 98,2%; 99,7%	**96%, 96%** 91,8%;93,8%;95,6%	**99%, 99%, 99%,** 98,4%; 99,2%	**99%, 99%, 100%** 99,2%; 99,5%
Результаты получивших отметку «3» **2007** 2006	**84%, 85%, 87%** 82,9%; 84,3%	**45%, 46%** 19%; 27,3%; 33%	**90%, 90%, 74%** 76,2%; 89,9%	**75%, 85%, 93%** 76,8%; 95,2%

Как видно из таблицы 2.8, средние проценты выполнения заданий базового уровня сложности, в основном, располагаются в промежутке от 75% до 85%. Исключение составляет раздел «Тригонометрия», где процент выполнения значительно ниже (53%-54%). В соответствии с принятым критерием можно считать, что разделы «логарифмы», «степени» и «корни» усваиваются выпускниками школ (процент выполнения заданий по указанным разделам превосходит 65%).

В течение всех лет проведения ЕГЭ отмечается низкий уровень овладения материалом раздела «Тригонометрия». Заметим, что ограничение списка формул, включаемых в контролируемые элементы содержания[3], не приносит существенного повышения результатов овладения этим разделом (это отмечалось и в отчете об итогах ЕГЭ 2006). В 2007 г. контролировались владение основным тригонометрическим тождеством и определением тангенса. Как видно из таблицы, этими двумя формулами владеют около 53%-54%, однако эти результаты все ещё ниже границы усвоения (65%).

Как и в предыдущие годы, практически все учащиеся, получившие оценку «5», успешно справляются со всеми заданиями на преобразования выражений базового уровня. Учащиеся, получившие оценку «3», овладели контролируемыми результатами обучения по всем разделам, кроме раздела «Тригонометрия».

Анализ ответов, выбираемых выпускниками при выполнении заданий с выбором ответа (А1-А10), показывает, что они допускают описанные ранее (см. отчеты за 2005-2006 гг.) типичные ошибки. Нужно отметить, что причиной типичных ошибок, главным образом, является незнание основных свойств преобразований (логарифмов, степеней, радикалов) и незнание тригонометрических формул. Кроме того, наблюдается большое число вычислительных ошибок.

[3] В 2005 г. в список формул, контролируемых заданиями ЕГЭ, были включены только пять «основных» формул тригонометрии, формулы приведения и формулы двойного аргумента.

В заданиях повышенного уровня сложности предлагалось найти значение выражения

$\sqrt[4]{(37-20\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}}$ (тип №1),

$\log_5(12,5\sqrt{5})-(\log_5^2 2+1-\log_5 4)^{0,5}$ (тип №2),

$\sqrt{25^x-12\cdot 5^x+36}+5^x-4,5$, если $4^x=0,7$ (тип №3).

При выполнении этих заданий необходимо интегрировать знания из различных разделов курса алгебры и начал анализа и курса алгебры основной школы. Предполагалось, что для нахождения значения выражения выпускник должен его предварительно преобразовать, используя основные свойства выражений, указанных в задании. Кроме того, в ходе решения ученик должен был сообразить, что для упрощения выражения необходимо выполнить разложение на множители, используя формулу квадрата двучлена. На завершающем этапе преобразований нужно было применить тождество $\sqrt[n]{x^n}=|x|$ с учетом значения x.

Лучше других выпускники выполнили задание типа №3 (справились 29,9% выпускников) и типа №1 (справились 27,0%). Ниже результат (19,5%) выполнения задания типа №2. Эта ситуация вполне объяснима. Во-первых, простейшие операции с радикалами и степенями выпускники выполняют лучше, чем с логарифмами. Во-вторых, в задании типа №3 в подкоренном выражении явно просматривается квадрат двучлена, а в задании, содержащем логарифмы, необходимо предварительно преобразовать выражение ($\log_5^2 2+1-\log_5 4=\log_5^2 2+1-2\log_5 2$), чтобы увидеть квадрат двучлена. Уровень сложности трех приведенных типов заданий выравнивается за счет включения в условия заданий дополнительных условий. Так, например, в задании типа №3 дополнительное условие («…, если 4^x =0,7») было указано не относительно 5^x, а относительно степени с основанием 4. Это дополнение вызвало определенные затруднения выпускников, о чем свидетельствовали обращения из регионов во время проведения экзамена, в которых высказывались сомнения в правильности условия задания. Однако, как показали результаты его выполнения, большинство хорошо и отлично подготовленных выпускников, на которых оно и было рассчитано, успешно с ним справились.

Результаты выполнения этого задания показывают, что оно хорошо выделяет учащихся, получивших оценку «3» (справились 11%) и получивших оценки «4» (справились 55%) и «5» (справились 90%). Как показывают приведенные данные, очевидно, что задания типов 1 – 3, проверяющие умения проводить тождественные преобразования выражений, могут служить образцами заданий повышенного уровня сложности, доступных хорошо подготовленным учащимся.

2.4.1.2. Уравнения и неравенства

Задания на решение уравнений и неравенств содержатся в каждой из трех частей вариантов КИМ. Эти задания достаточно полно отражают многообразие видов уравнений и неравенств, а также методов их решений, изучаемых в 10-11 классах средней школы. В варианты включены задания базового, повышенного и высокого уровней. В заданиях базового уровня проверяются умения решать простейшие уравнения и неравенства, в задачах повышенного уровня – умения решать комбинированные уравнения и системы уравнений. В алгебраическом задании

высокого уровня сложности (С3) требовалось самостоятельно проанализировать предложенную ситуацию и сконструировать метод решения, применив при этом нестандартный способ исследования решений уравнений различного типа (логарифмических, степенных и квадратных с модулем). Последнее задание высокого уровня вариантов КИМ (С5) впервые контролировало один из самых сложных видов математической деятельности – умение проводить доказательство математических утверждений.

Кроме того, имеется ряд заданий на исследование функций, при выполнении которых требуется решить различные уравнения или неравенства. Таким образом, набор типов уравнений и неравенств является достаточно представительным.

В заданиях базового уровня сложности проверялись умения решать

– показательные уравнения и неравенства,
– логарифмические уравнения и неравенства,
– иррациональные уравнения,
– тригонометрические уравнения,
– комбинированные уравнения,
– дробно-рациональные неравенства.

Кроме того, проверялось умение решать неравенства графическим методом. Отметим, что указанные в перечне умения ежегодно проверялись в течение последних лет.

В сводной таблице 2.9 приведены результаты выполнения заданий, направленных на проверку указанных умений (образцы заданий см. в Приложении 2.2).

Таблица 2.9

Средние проценты выполнения заданий базового уровня на решение уравнений и неравенств

	Логарифмические уравнения	Тригонометрические уравнения	Показательные уравнения	Иррациональные уравнения	Дробно-рациональные неравенства	Показательные неравенства	Логарифмические неравенства	Графическое решение неравенства	Комбинированные уравнения
Общие результаты **2007г.**	***Задание 12*** **71,8%**	***Задание 9*** **67,7%, 70,0%, 76,3%**	***Задание 12*** **69,8%, 73%**	***Задание 13*** **54,0%, 67,3%**	***Задание 8*** **67,9%, 70,9%, 74,6%**	***Задание 10*** **80,8%**	***Задание 10*** **66,8%**	***Задание 7*** **59,3%, 71,3%**	***Задание 12*** **71,7%**
2006г.	66,6%	61,3%;75,8%	64,5%	55,3%	74,7%	81,6%	32,4%	63,0%;78,2%	–
Результаты получивших отметку «5» **2007г.**	**100%**	**98%, 99%,99%**	**99%, 100%**	**97%, 99%**	**97%, 98%, 99%**	**99%**	**96%**	**87%, 98%**	**99%**
2006г.	97,6%	95,5%;99%	99,5%	97,3%	98,9%	99,1%	78,5%	97,8%;98.9%	–
Результаты получивших отметку «3» **2007г.**	**75%**	**66%, 72%, 81%**	**71%, 79%**	**47%, 68%**	**68%, 72%, 75%**	**88%**	**67%**	**53%, 72%**	**78%**
2006г.	55,6%	55,6%; 70,9%	52,8%	34,3%	80,7%	83,8%	17,7%	45,8%;80,7%	–

Как видно из таблицы 2.9, средние проценты выполнения заданий базового уровня сложности, в основном, располагаются в промежутке от 66% до 80%. Исключение составляет один тип иррациональных уравнений и один тип неравенств, решаемых графическим методом (см. Приложение 2.2).

Сравнение результатов овладения указанными выше умениями в 2007 г. и в 2006 г. показывает, что они достаточно близки. Вместе с тем, нужно отметить некоторую положительную динамику в овладении умением решать логарифмические неравенства.

Как и в прошлые годы, выпускники, получившие оценку «5», практически все овладели умениями, проверяемыми заданиями базового уровня сложности. Учащиеся, получившие отметку «3», овладели умениями решать все проверявшиеся виды уравнений и неравенств, кроме некоторых типов иррациональных уравнений, а также неравенств, решаемых графически.

Заданиями повышенного уровня сложности проверялись умения решать

– иррациональные уравнения,

– комбинированные уравнения (иррационально-логарифмические),

– тригонометрические уравнения, в частности, с отбором корней, принадлежащих заданному промежутку,

– системы двух уравнений с двумя переменными различными методами (методом замены переменной и методом сложения).

В каждом варианте КИМ содержалось три задания на решение уравнений и их систем, в одном из которых проверялось умение решать систему, а в двух других – умение решать уравнение. Два задания требовали краткого ответа, а одно (проверяющее умение решать уравнение) – записи решения.

Из трех задач повышенного уровня сложности менее сложной была задача на решение системы двух уравнений с двумя неизвестными. Ниже приведены примеры таких систем.

Найдите значение выражения $\cos x$, если известно, что

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ 2\cos x + 8\sin y = 3 \end{cases} \qquad \text{(тип №1).}$$

Найдите значение выражения $x \cdot y$, если $(x; y)$ – решение системы

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 9^x - 18 \cdot 3^y = 3 \end{cases} \qquad \text{(тип №2).}$$

Найдите значение выражения $x - y$, если $(x; y)$ – решение системы

$$\begin{cases} 7\log_3 x - 6\log_3 y = 25, \\ 5\log_{\frac{1}{3}} x + 6\log_3 y = 23 \end{cases} \qquad \text{(тип №3).}$$

В целом, с приведенными типами заданий на решение систем повышенного уровня сложности выпускники справились удовлетворительно: тип №1 – 39%, тип №2 – 43,3% и тип №3 – 38,7%. Как видно из приведенных данных, более высокий результат показали при решении системы, включающей показательное уравнение (тип №2).

Вероятнее всего, это связано с тем, что у многих выпускников большие трудности чаще возникают при преобразовании логарифмических и тригонометрических выражений, чем показательных выражений (см. п. 2.4.1.1 данного отчета).

Фактически нет различий в результатах выполнения указанных типов заданий выпускниками, получившими оценку «5» (96%, 97% и 96% соответственно по указанным трем типам). Небольшие различия (75%, 83% и 79% соответственно по типам заданий) в результатах их выполнения большинством выпускников, получивших оценку «4». Отсюда можно сделать вывод о том, что указанные категории выпускников овладели этими контролируемыми результатами обучения. При этом с этими заданиями справились только 23%, 27% и 15% (соответственно по типам заданий) выпускников, получивших оценку «3».

Приведенные данные говорят о доступности трех рассмотренных типов заданий для учащихся, показавших хороший и отличный уровни подготовки. Поэтому их можно рекомендовать для включения в банк заданий повышенного уровня для вариантов КИМ.

Приведем примеры заданий, которые также проверяли умение решать уравнение:

$\log_7(3x+5)+\sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)}=0$ тип №1,

$\sqrt{-2x}\cdot\sqrt{-2x-2,5}=3$ тип №2,

$\cos(9\pi x)-tg(\pi x)\sin(9\pi x)=\cos(10\pi x)$ на промежутке $(0;2]$ тип №3.

Анализ содержания этих заданий показывает, что приведенные в них уравнения не требуют каких-то сложных «технических» преобразований, специальных методов решения и т.п. Но вместе с тем, каждое уравнение имеет некоторую «изюминку», которую ученику нужно было заметить и использовать для сокращения проводимых математических выкладок и соответственно времени решения. Так, например, при решении иррационально- логарифмического уравнения сильный ученик должен был бы заметить, что на области определения уравнения не нужно рассматривать два случая при раскрытии модуля ($\sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)}=\left|\log_7(2x+5)\right|$).

С решением уравнений выпускники справились менее успешно, чем с решением системы. Выполнили задание типа №1 – 21,5%, типа №2 – 30,0%, типа №3 – 22,9%. Отметим, что задание выполнили 80%, 89% и 69% (соответственно) выпускников, получивших оценку «5». Т.е. можно констатировать, что отличники справляются[4] со всеми тремя типами уравнений, но при этом явно хуже решают тригонометрическое уравнение.

Только 43%, 59% и 40% (соответственно по типам заданий) выпускников, получивших оценку «4», верно решили предложенные уравнения. Т.е. школьные «хорошисты» не справляются с двумя из этих трех типов заданий. Исходя из приведенных результатов, можно сделать вывод, что задания типов №1 и №3 успешно выделяют отличников, а задания типа №2 – «хорошистов».

В последнем задании Части 2 (С2), при выполнении которого нужно было записать полный ответ, выпускникам предлагалось решить и записать решение следующих уравнений.

[4] Считается, если не менее 50% учащихся выполняют задание повышенного уровня сложности, направленное на проверку того или иного элемента содержания, то фиксируется овладение этим элементом.

Решите уравнение $x^2+x=0,5(6-x)+\sqrt{2x^2+3x+2}$ (тип №1),

Решите уравнение $\sin^2\left(\frac{2x}{5}\right)-10\sin\left(\frac{2x}{5}\right)\sin\left(\frac{x}{5}\right)+25=25\cos^2\left(\frac{x}{5}\right)$ (тип №2),

Решите уравнение $40\text{-}14x+x^2=2(x-4)\sqrt{x}$ (тип №3).

С уравнениями справились соответственно 8%, 11,9% и 11,3% участников экзамена. При этом большинство выпускников, получивших оценку «5», успешно выполнили эти задания (справились соответственно 71%, 82% и 72%), а для выпускников, получивших оценку «4», они оказались слишком трудными (их выполнили 12%, 20% и 16%).

Анализ работ участников экзамена показал, что многие учащиеся попытались применить стандартные («шаблонные») методы решения, не учитывая особенности условия данного задания. Этот подход приводил к громоздким преобразованиям и вычислениям, а, в конечном итоге, к отсутствию положительного результата. Вместе с тем, уверенное владение материалом основной школы, анализ разных подходов к решению, прикидка результата и оценка плюсов и минусов того или иного метода нередко приводили к быстрому получению ответа. Например, в уравнении типа №3 применение шаблонного приема «возведение во вторую степень» приводит к громоздкому уравнению 4ой степени, а разложение левой части уравнения на множители ($(x-10)(x-4)=2(x-4)\sqrt{x}$) позволило без лишних выкладок найти корни данного уравнения.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что рассмотренные уравнения позволяют выделить учащихся, имеющих отличную математическую подготовку.

Задания высокого уровня сложности

В варианты КИМ были включены два алгебраических задания (С3 и С5), для выполнения которых требовалось интегрировать сведения из различных разделов курса алгебры основной школы и курса алгебры и начал анализа.

В задании С3 требовалось переформулировать условие задания для составления его математической модели, исследовать эту модель и интерпретировать полученный результат. Ниже приведены три варианта этого задания.

Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-3;-1]$ значение выражения x^4-8x^2-2 не равно значению выражения ax^2. (тип №1)

Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-5;-2]$ значение выражения $x^2-4|x|$ не равно значению выражения $a|x|+4$. (тип №2)

Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(3;9]$ значение выражения $\log_3^2 x+3\log_3 x$ не равно значению выражения $9+a\log_3 x$. (тип №3)

Как видно из условия заданий, в одном из возможных способов решения в качестве модели может выступать уравнение, содержащее параметр, которое надо исследовать, применяя различные методы, доступные и известные учащимся.

С приведенными типами задания справились соответственно 1,2%, 1,7% и 2,3% выпускников. Среди учащихся, получивших аттестационную отметку «5», его выполнили 16%,19% и 24%, а среди учащихся, получивших оценку «4», – только 1% (независимо от типа задания).

Анализ полученных данных показывает, что, как и планировалось разработчиками, даже для тех выпускников, которые получили аттестационную отметку «5», рассмотренные типы задания оказались трудными. Таким образом, данное задание успешно выполняет функцию отбора наиболее подготовленных выпускников для зачисления в те вузы, где предъявляются высокие требования к математической подготовке выпускников.

В последнем задании (С5) варианта КИМ выпускнику предлагалось либо решить систему двух уравнений с двумя переменными, либо доказать, что система имеет указанное число решений. Ниже приведены варианты заданий С5.

Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 15x^3+36x^2+22x+4=0 \\ 9\sin\frac{\pi}{x}+cos\left(\left(5x+1\right)y\right)=y\left(y+\frac{2}{x}-1\right)+\sqrt{\frac{4}{x}+16+5x\left(1-5x\right)\cdot\sin y} \end{cases}$$

не имеет решений. (тип №1),

Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 16x^3+40x^2+29x+6=0 \\ \log_{13+4x}\left(5y+10+\frac{3}{x}\right)-7=y\left(5+12x\right)+\sqrt{\frac{9}{x}-8x\left(2x+1\right)+15\cdot\log_7 y} \end{cases}$$

имеет единственное решение. (тип №2),

Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 8x^3+18x^2+15x+14=0 \\ \left(10+4x\right)^y-2=y\left(5+\frac{7}{x}\right)+7^{x+y}\cdot\sqrt{16x\left(x+1\right)^2+40x^2+89x+49} \end{cases}$$

имеет хотя бы два различных решения. (тип №3).

При выполнении этих заданий внимание выпускника сосредоточено не на переформулировке условия или составлении математической модели предложенной ситуации, главным является конструирование нового метода решения системы, немаловажной составляющей которого является рассмотрение различных случаев в зависимости от возможных значений переменных.

С приведенными заданиями справились соответственно 0,3%, 0,6% и 0,7%. Они оказались непосильными (справились 0%) для выпускников, получивших оценку «4», а также для выпускников, получивших аттестационную отметку «5» (справились соответственно 4%, 6% и 8%). Таким образом, данное задание выделяет абитуриентов

для тех вузов, которые предъявляют повышенные требования к математической подготовке выпускников.

Отметим, что, как и при выполнении заданий базового и повышенного уровней сложности, даже наиболее подготовленные выпускники показывают более низкие результаты при проверке разделов «Тригонометрия» и «Логарифмы», чем «Корни» и «Степени».

2.4.1.3. Функции

Задания на проверку функциональных представлений учащихся касались следующих вопросов: область определения и область значений функций, четность (нечетность) и периодичность функций, промежутки возрастания и убывания, точки максимума (минимума).

Как и в прошлые годы, проводилась проверка овладения умением распознавать различные свойства функций, представленных своими графиками, а также умением исследовать различные свойства функции аналитически. При ответе на указанные вопросы учащиеся могли проводить исследование элементарными методами или с помощью производной. В работу были включены задания разного уровня сложности (базового и повышенного) на исследование функции. Кроме того, умение применять свойства известных функций можно было проверить и с помощью заданий высокого уровня сложности (С3 и С5).

Заданиями базового уровня сложности с выбором ответа проверялось овладение следующими умениями:

– находить область определения и множество значений функции,
– распознавать (по графику) четные (нечетные) функции,
– находить (по графику) промежутки возрастания (убывания) и промежутки знакопостоянства функции,
– находить производную.

Результаты овладения проверяемыми умениями представлены в таблице 2.10 (образцы заданий см. в Приложении 2.2).

Сравнение результатов (2006 г. и 2007 г.) показывает определенную положительную динамику овладения функциональными умениями на базовом уровне. Отметим, что выпускники овладели практически всеми контролируемыми результатами обучения. Исключение составляет только задание на нахождение множества значений логарифмической функции (40,3%).

Как и в прошлые годы, учащиеся, получившие оценку «5», успешно справляются со всеми заданиями базового уровня сложности. Учащиеся, получившие оценку «3», овладели большинством контролируемых умений. Исключение составляет умение находить множество значений логарифмической функции (вида $y = \log_a x + m$).

Таблица 2.10

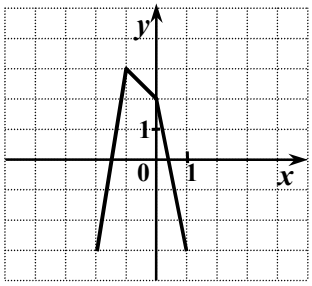
Средние проценты выполнения заданий базового уровня по разделу «Функции»

	Область определения функции	Множество значений показательной функции	Множество значений тригонометрич. функции	Множество значений логарифмической функции	Промежутки возрастания (убыв.)	Распознавание четной (нечетной) функции	Производная функции	Нахождение промежутков знакопостоянства
Общие результаты **2007**	***Задание 4*** **80,1% (по графику); 64,0% (аналит.)**	***Задание 6*** **73,0%**	***Задание 6*** **75,7%**	***Задание 6*** **40,3%**	***Задание 4*** **83,6%**	***Задание 4*** **68,7%**	***Задание 5*** **79,8%,89,9%,90,0%**	***Задание 7*** **84,6%**
2006	47,2%; 69,4%	52,8%	71,0%; 72,3%	–	68,8%	56,9%	78,2%; 89,7%	–
Результаты получивших отметку «5» **2007**	**98% (по графику); 97% (аналит.)**	**100%**	**100%**	**89%**	**99%**	**98%**	**98%,100%, 100%**	**99%**
2006	91,6%; 98,6%	95,1%	98,1%; 99,7%	–	97,4%	95,2%	98,8%; 99,7%	–
Результаты получивших отметку «3» **2007**	**61% (аналит.); 81% (по графику)**	**73%**	**94%**	**35%**	**88%**	**65%**	**82%,94%, 96%**	**89%**
2006	34,6%; 58,4%	41%	59,1%; 69,9%	–	65,4%	49,4%	81,9%; 95,8%	–

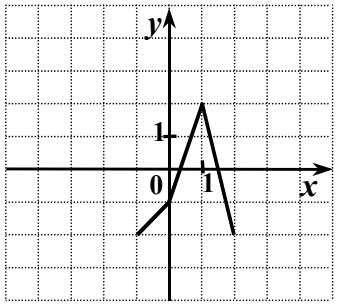
В 2007 г. заданиями повышенного уровня сложности впервые проверялось владение понятием периодичности функции (задания с кратким ответом) и впервые предлагалось задание с развернутым ответом, в котором требовалось исследовать функцию.

Приведем примеры заданий, проверяющих умение применять определение понятия периодичности для вычисления значений функции.

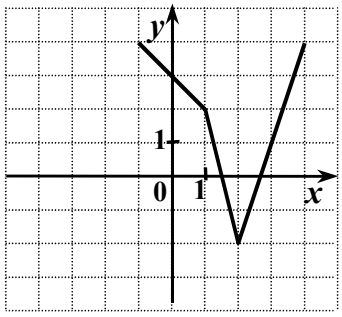
«Функция y= $f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке изображен график этой функции при $-2 \le x \le 1$. Найдите значение выражения $f(-5) - f(-1) + f(12)$ ». (тип №1),



«Функция y= $f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке изображен график этой функции при $-1 \le x \le 2$. Найдите значение выражения $f(-8) \cdot f(0) \cdot f(5)$». (тип №2),



«Функция y= $f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 5. На рисунке изображен график этой функции при $-1 \le x \le 4$. Найдите значение выражения $f(-4) - f(0) \cdot (13)$» . (тип №3).



В целом, результаты выполнения задания нового типа сравнительно невысокие: 25,2%, 27,5% и 30% соответственно. В то же время с ним успешно справились учащиеся, получившие оценку «5»: выполнили верно задание 90%, 95% и 92% соответственно. Несмотря на элементы новизны, задание оказалось вполне посильным и тем учащимся, которые получили оценку «4», с ним справились 52%, 58% и 54% соответственно.

Задание типа №1 выполнили несколько хуже двух других заданий. Анализ результатов выполнения заданий такого же типа в 2006 и 2007 гг. позволяет высказать предположение, что, скорее всего, это связано с необходимостью найти алгебраическую сумму трех рациональных чисел (а не двух, как в типах №2 и №3). При этом увеличивается вероятность допустить вычислительную ошибку.

Второе задание повышенного уровня сложности с развернутым ответом связано с исследованием функции – нахождением ее точек максимума. Заметим, что в предыдущие годы владение отдельными элементами общей схемы исследования функции (нахождения области определения, наибольшего (наименьшего) значения, точек максимума (минимума) и т.п.) проверялось заданиями с кратким ответом. Это было обусловлено тем, что в различных учебниках в данном разделе используется разная терминология (например, критическая точка и стационарная точка), различные образцы записи решения и пр. В 2007г. найдены подходы к решению обозначенной проблемы: разработаны рекомендации по проверке, предложены варианты возможных решений и критерии проверки и оценки работ. Из общей схемы исследования функции

проверяется умение находить точки максимума (минимума). Однако опосредованно проверяется овладение и другими умениями, связанными с исследованием функции, например, умениями найти область определения функции и её производную.

Приведем примеры заданий.

Найдите точки минимума функции

$$f(x)=3x^4+3x^3-72x^2+2^{-\log_{0,5}\left(x^3+8\right)''} \qquad \text{(тип №1)},$$

Найдите точки максимума функции

$$f(x)=\left(7^{\sqrt{1-x}}-2\right)^2-49^{\sqrt{1-x}}+4\cdot 7^{\sqrt{1-x}}+4x^2-0,5x^4 \qquad \text{(тип №2)},$$

Найдите точки максимума функции

$$f(x)=\frac{6-6\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}\cdot x^2+2x^3-15x^4 \qquad \text{(тип №3)}.$$

Приведенные выше задания с развернутым ответом повышенного уровня сложности выполнили свою функцию – выделили более подготовленных выпускников. С ними справились 79%, 79% и 67%, получивших оценку «5». Они оказались посильны и части выпускников, получивших оценку «4» (справились 28%, 29% и 16% соответственно). Это вполне объяснимо, т.к. при выполнении задания ученик должен был применить известный (стандартный) алгоритм нахождения точек максимума (минимума). Однако трудность задания состояла в том, что нужно упростить формулу, задающую функцию и найти область определения.

В целом, с заданием справились соответственно 13,9%, 14,7% и 10,8%. С заданием типа №3, где используются тригонометрические функции, справилось меньшее число учащихся. Заметим, что эта тенденция наблюдается по всем содержательным линиям курса алгебры (выражения, уравнения и неравенства, функции).

2.4.2. Анализ выполнения заданий по геометрии

2.4.2.1. Результаты выполнения геометрических задач повышенного уровня

При интерпретации этих результатов следует иметь в виду, что многие из участников экзамена вообще не указали ответ к геометрической задаче: по планиметрическим задачам – 45%-78%, по стереометрическим задачам – 46%-80% учащихся. Очевидно, что некоторые из этих учащихся не смогли довести решение задачи до ответа. Кроме того, практика проведения ЕГЭ показывает, что значительная часть выпускников не приступают к решению геометрических задач, так как не предполагают поступать в вузы, в которых нужно сдавать экзамен по математике. Число учащихся, не указавших ответ к геометрической задаче, почти не изменилось по сравнению с 2006 и с 2005 годами (54%-79% и 50%-82% – по планиметрическим задачам, 55%-78% и 45%-76% – по стереометрическим задачам).

Планиметрия

Планиметрические задачи повышенного уровня, включенные в варианты КИМ в июне 2007 года, были составлены на материале тем: «Треугольники»,

«Четырехугольники» (из разделов «Параллелограмм» и «Равнобедренная трапеция»), «Правильные многоугольники». Решение всех задач по каждому из указанных разделов содержало один и тот же «ключевой момент»: наиболее важный шаг решения, без выполнения которого задачу или невозможно решить, или ее решение становится слишком длинным и громоздким. Ключевым моментом решения задач по теме «Треугольники» являлось: выявление пропорциональных отрезков на основе свойства биссектрисы треугольника; по разделу «Параллелограмм» – выявление подобных треугольников на основе использования параллельности сторон параллелограмма и свойств углов при параллельных прямых и секущей; по разделу «Равнобедренная трапеция» – применение того факта, что один из отрезков, отсекаемых высотой на большем основании, равен полусумме оснований (средней линии трапеции); по разделу «Правильные многоугольники» – использование свойств правильного шестиугольника для вычисления его элементов.

В ходе решения задач проверялись также умения применять ряд свойств фигур и формул, обеспечивающих вычисление искомых в задаче величин. В частности, в зависимости от способа решения конкретной задачи нужно было уметь применить 1–2 факта из следующего перечня:

- признак и свойства равнобедренного треугольника
- признаки подобия треугольников и следующая из подобия пропорциональность соответствующих сторон;
- формулы площади треугольника и трапеции;
- теорема Пифагора;
- определение синуса, косинуса, тангенса угла прямоугольного треугольника (решение прямоугольных треугольников).

Заметим, что этот перечень в целом соответствует определенным способам решения задач. Вместе с тем, отдельно взятую задачу часто можно было решить не одним единственным способом. Поэтому данный перечень не является абсолютно полным и необходимым (при других способах решения, возможно, будут использованы и другие факты).

Решение каждой задачи требовало комплексного применения, как правило, 1–2 ключевых фактов и 1-2 фактов, обеспечивающих вычисление искомых величин. Поэтому на основании полученных статистических данных, характеризующих только процент выполнения задания в целом (процент числа верных ответов), можно лишь выявить число учащихся, овладевших умениями применять весь комплекс геометрических фактов, необходимых для решения задачи, и невозможно однозначно определить, какие из этих фактов усвоены лучше, а какие хуже. Тем не менее, эти данные позволяют сделать некоторые выводы относительно овладения учащимися отдельными умениями. В частности, сопоставить результаты решения задач, связанных с применением ключевых фактов из разных разделов курса математики, а также выявить различия в результатах решения задач по каждому тематическому блоку в зависимости от того, чем различаются вычислительные части их решения.

Треугольники. Задания данной тематики можно разделить на две группы. К одной из них относятся задачи, где по условию был дан прямоугольный треугольник, в котором проведена биссектриса одного из острых углов. Решение этих задач было связано с составлением пропорции, следующей из свойства биссектрисы треугольника. В другой группе задач заданная конфигурация была более сложной. Она представляла собой равнобедренный треугольник, в котором проведены две высоты (к основанию и к боковой стороне): «Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 15, а его площадь равна 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AH, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь треугольника BOH». В этом случае

нужно было использовать тот факт, что высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его биссектрисой, и выявить такой же, как в задачах первой группы, прямоугольный треугольник с проведенной в нем биссектрисой.

В целом с задачами по этой теме справились 1,6%-13,7% учащихся. При этом число верных ответов в группе сильных учащихся колебалось от 4,5% до 27,7%, в группе слабых – по двум задачам этот показатель составил около 4%-5%, а по всем остальным он колебался в пределах 0%-1,5%.

Наиболее низкие результаты (1,6%-3,9%) получены по задачам, для решения которых требовалось составить и решить квадратное уравнение. Например, как в следующей задаче. «В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты BE и CH пересекаются в точке K, причем BH = 6, KH = 3. Найдите площадь треугольника CBK».

Задачи этой серии использовались в вариантах КИМ в 2005 году. В отличие от 2005 года, результаты решения задач данной тематики не зависели от того, даны ли были длины отрезков, на которые биссектриса разбивает сторону рассматриваемого треугольника, или были даны другие элементы, которые можно использовать для составления пропорции. Так, в 2005 году самые высокие проценты верных ответов были получены по задачам первого из указанных типов, а в 2007 году результаты по таким задачам колебались от 1,6% до 13,7%. Точно так же не наблюдалось значительной разницы между результатами решения задач, в условии которых данные величины выражались целыми числами, и задач, где аналогичные величины были заданы десятичной дробью или иррациональным числом. В 2005 году по первым были получены более высокие результаты, чем по вторым, а в 2007 году и те, и другие результаты колебались в примерно одинаковом диапазоне (если отбросить задачи, где нужно было составлять квадратное уравнение, то с задачами с целыми данными справились 4,8%-13,7%, с дробными и иррациональными – 3,6%-8,1%).

Параллелограмм. Решение задач этой группы требовало применения свойства биссектрисы, проведенной в параллелограмме, а именно, выявления равнобедренных треугольников, которые возникают при таком построении. Кроме этого, нужно было выявить подобные треугольники и, составив пропорцию, вычислить длины неизвестных сторон. Различия в задачах составляли комбинации задаваемых условием отрезков в данной конфигурации. Их решения состояли из одинаковых шагов, возможно, в разной последовательности. При этом в одних случаях вычисления производились в подобных треугольниках, содержащих равные вертикальные углы, как в следующей задаче: «В параллелограмме ABCD биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M и прямую AB в точке K. Найдите периметр треугольника BCK, если DM = 12, CM = 15, AM = 16.» В других случаях подобные треугольники имели один общий угол, как в следующей задаче: «В параллелограмме ABCD биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр треугольника CBT, если AB = 21, BM = 35, MD = 9.» Кроме того, решение ряда задач включало небольшой дополнительный шаг: вычисление суммы или разности длин двух отрезков, как в последней из приведенных выше задач.

Эта серия задач использовалась в вариантах 2006 года. В отличие от полученных тогда результатов (которые различались для разных вариаций задач), в 2007 году ни одна из вариаций задач не сказалась на числе верных ответов: результаты по всем типам задач произвольно колебались в пределах примерно одинаковых промежутков.

По всей совокупности задач данной тематики было 7,4%-19,9% верных ответов, в группе сильных 24,5%-55,4%, в группе слабых 0%-0,9%. Эти результаты несколько

выше, чем в 2006 году (тогда в целом было 6-16% верных ответов, в группе сильных – 19%-45%; в группе слабых – 0%-1,6%).

Равнобедренная трапеция. Для использования рационального способа решения задач данной тематики нужно было рассмотреть прямоугольный треугольник, в котором гипотенузой является диагональ данной трапеции, а катетами – высота трапеции и отрезок, равный средней линии трапеции. Затем нужно было вычислить его неизвестные элементы, используя приемы решения прямоугольных треугольников (теорему Пифагора, определения синуса, косинуса или тангенса острого угла прямоугольного треугольника). Как правило, при решении таких задач определенную трудность для учащихся вызывает привлечение того факта, что в данной конфигурации отрезок, отсекаемый на большем основании высотой трапеции, равен ее средней линии. Кроме того, не все учащиеся знают формулу площади трапеции, где площадь выражается как произведение высоты на среднюю линию. Если же указанные два факта не применять при решении данных задач, то их решение становится значительно более длинным и трудным.

Задачи данной тематики можно разделить на три группы. Первую составляют задачи, в которых нужно было, зная один из линейных элементов указанного выше прямоугольного треугольника и синус или косинус его острого угла, найти высоту и (или) среднюю линию трапеции, а затем вычислить площадь. По сравнению с другими задачами, решение задач этой группы содержало на один шаг больше, но вместе с тем, как правило, применение определений синуса и косинуса острого угла для учащихся бывает легче, чем применение определения тангенса. Результаты по задачам этой группы оказались самыми низкими (10,3-16,6% верных ответов, в группе сильных – 33,5%-52,7%, в группе слабых – 0-1,1%). (2006 г. – 4-9% верных ответов, в группе сильных – 12%-25%, в группе – слабых 0%-1,5%).

Примерно такие же результаты получены по задачам, где в решении не использовались тригонометрические функции острых углов, а вычисления в прямоугольном треугольнике требовали только применения теоремы Пифагора. Такое упрощение компенсировалось тем, что этот треугольник не возникал в явном виде из условия задачи, то есть нужно было догадаться сделать необходимое дополнительное построение. С такими задачами в целом справились 11,8-15,8% учащихся, в группе сильных – 33,2%-45,1%, в группе слабых – 0,5%-1,2%. (2006 г. – 15%-23% учащихся, в группе сильных – 38%-56%, в группе слабых – 0,7%-2,1%).

Лучше всего учащиеся справились с задачами, в которых вычислительная часть составляла на один шаг меньше, но применить нужно было определение тангенса острого угла. В целом с этой группой задач справились 16,1%-22,3%, в группе сильных – 45,6%-66%, в группе слабых – 0,4%-1,3%.

По всей группе задач на равнобедренную трапецию показано 10,3%-22,3% верных ответов, в группе сильных – 33,5%-52,7%, в группе слабых – 0%-2%.

Правильные многоугольники. В 2007 году в варианты КИМ были включены задачи на правильные шестиугольники. Для их успешного решения не требовалось знать какие-то специфические формулы для вычисления элементов правильных многоугольников. Рациональное решение предполагало использование того факта, что правильный шестиугольник составлен из 6 равных равносторонних треугольников, сторонами которых являются радиусы описанной около многоугольника окружности и сторона шестиугольника, высота – радиусом вписанной в шестиугольник окружности, а один из углов – центральным углом многоугольника. Практически во всех задачах основным шагом решения являлось выделение некоторого прямоугольного треугольника, в котором острые углы равны 30° и 60°, и вычисление одной из сторон этого треугольника, например, в задаче: «В правильном шестиугольнике ABCDEF

диагональ AC равна $4\sqrt[4]{3}$. Найдите площадь шестиугольника». Задачи этой серии были разнообразны по способу задания конфигурации и искомым величинам, и их весьма сложно разбить на какие-либо подгруппы для сравнения результатов их решения.

Вместе с тем можно отметить, что самые низкие результаты получены по двум задачам, решение которых, по сравнению с другими задачами, требовало осуществления дополнительного шага. В одной из них был сложнее рисунок, и для выделения нужного прямоугольного треугольника необходимо было провести дополнительные построения. Первую задачу верно решили 3,5% учащихся (9,6% в группе сильных, 1,3% в группе слабых). Во второй задаче искомый отрезок складывался из двух, каждый из которых вычислялся в своем треугольнике, или требовал рассмотрения равностороннего треугольника, который располагался в данном шестиугольнике не самым привычным образом: «В правильном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ сторона равна $8\sqrt{3}$. Отрезок BC соединяет середины сторон A_3A_4 и A_5A_6. Найдите длину отрезка, соединяющего середину стороны A_1A_2 с серединой отрезка BC.» С этой задачей справились 4,4% учащихся (13,5% в группе сильных, ни одного ученика в группе слабых).

Самые высокие результаты (25,2% и 26,8% верных ответов, 62,3% и 69,1% – в группе сильных, 5% – в группе слабых) получены по двум задачам, которые можно было решить без выполнения рисунка, используя лишь одну формулу площади треугольника.

С остальными задачами справились 7-16,2% учащихся, 23,4%-44,9% в группе сильных, 0,3%-2,2% в группе слабых.

В целом с задачами на правильные шестиугольники справились 3,5%-26,8% учащихся, при этом в группе сильных учащихся получено 9,6%-69,1% верных ответов, в группе слабых – 0%-5,0%.

Ниже приведены результаты решения всех планиметрических задач, включенных в варианты КИМ в 2005-2007 гг. (см. таблицу 2.11).

Таблица 2.11

Результаты выполнения заданий по планиметрии в 2005-2007 гг. (в %)

Состав учащихся	2005 г.	2006 г.	2007 г.
Все участники	2-18	4-23	**1,6-27**
Группа сильных	6,5-54	11-56	**4,5-69**
Группа слабых	0-3	0-2	**0-5**

Как видно из таблицы, с решением планиметрических задач в 2007 году справились 1,6%-26,8% учащихся, при этом в группе слабых – 0%-5%, а в группе сильных – 4,5%-69,1% учащихся. Эти результаты примерно такие же, как в предыдущем году. Исключение составляют 2 задачи на правильные многоугольники, о которых говорилось выше, по которым в 2007 году получено больше всего правильных ответов. Следует отметить, что в 2007 году, как и в 2006 году, результаты выполнения задач в разных вариантах КИМ более равномерные, чем в предыдущие годы. Так, наиболее высокие показатели получены в 2005 году только при выполнении малой части задач, использовавшихся в вариантах КИМ – только по 7 задачам из 57 получены результаты выше 10%, а по подавляющему большинству задач в группе сильных учащихся было получено менее 30% верных ответов. В 2006 году результаты выше 10% получены по 37 задачам из 58, в 2007 году – по 31 из 56 задач, по большинству задач в 2006 и 2007 гг. получено более 30% верных ответов. Вместе с тем, в группе слабых учащихся результаты несколько улучшились. При этом не только повысился

максимальный результат выполнения заданий в этой группе, но также значительно уменьшилось число заданий, по которым в группе слабых учащихся получен нулевой результат и результат, не превышающий 1%.

Поскольку в 2007 году использовались задачи, аналогичные задачам вариантов КИМ в 2005 и 2006 гг., есть возможность сопоставить результаты их решения (см. таблицу 2.12).

Таблица 2.12

Результаты решения по задач по планиметрии в 2005-2007 гг. (в %)

Основное содержание заданий		2005	2006	2007
Треугольник (свойства равнобедренного треугольника, свойство биссектрисы треугольника)	в целом в группе сильных в группе слабых	2-9 6,5-21 0-4,5		2-14 4,5-28 0-5
Параллелограмм (свойства параллелограмма, подобие треугольников)	в целом в группе сильных в группе слабых		6-16 19-45 0-1,6	7-20 24,5-55 0-1
Трапеция (свойства равнобедренной трапеции, решение прямоугольных треугольников)	в целом в группе сильных в группе слабых		4-23 12-56 0-2	10-22 33,5–53 0–2
Правильные многоугольники* (шести-, восьми-, девяти-, двенадцатиугольники)	в целом в группе сильных в группе слабых	3-17 10-50 0-2,6		3,5-27 10-69 0-5

* В 2006 году использовались задачи на правильные восьми-, девяти-, двенадцатиугольники, в 2007 году – на правильные шестиугольники.

Анализ представленных результатов и изучение опыта работы школы позволяют сделать некоторые выводы относительно состояния подготовки выпускников по курсу планиметрии:

– несмотря на некоторое повышение показателей в 2007 году, общая тенденция низких результатов выполнения планиметрических задач не изменилась и, как и раньше, говорит о весьма слабой подготовке по планиметрии значительной части выпускников;

– небольшое повышение результатов, скорее всего, объясняется тем, что хотя и медленно, но все-таки ощутимо в практике работы школ усиливается внимание к геометрической подготовке выпускников. Особенно это проявляется среди более подготовленных учащихся.

Стереометрия

В 2007 году, как и в прошлые годы, в варианты КИМ была включена одна стереометрическая задача повышенного уровня. Эти задачи были составлены по теме «Тела вращения» (прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус). Проверялись знания о свойствах указанных пространственных фигур, умение применять эти свойства для вычисления элементов фигур, а также знание формул для вычисления объемов цилиндра и конуса, площадей их боковых поверхностей и сечений.

Кроме того, проверялись умения распознавать (применяя соответствующие определения и теоремы) углы и расстояния в пространстве: угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости.

Цилиндр. В варианты 2007 года входили две серии задач на цилиндр. Ключевым моментом решения почти всех задач первой серии являлось применение понятия об угле между прямой и плоскостью. Например, «Концы отрезка МК лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой МК и плоскостью основания цилиндра равен 30°, МК = 8, площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π. Найдите периметр осевого сечения цилиндра». Во всех этих задачах вычисления были основаны на решении прямоугольных треугольников. А именно, рассматривался прямоугольный треугольник, составленный из образующей цилиндра, хорды окружности основания и отрезка, соединяющего две точки на основаниях цилиндра. Лишь в трех задачах речь шла не об угле между прямой и плоскостью, а об угле между двумя плоскостями. В решении этих задач нужно было рассматривать прямоугольный треугольник, составленный из диаметра и двух хорд окружности основания цилиндра.

Задачи в данной серии различались тем, какие элементы указанных прямоугольных треугольников были заданы, каким образом был задан угол: градусной мерой (30°, 45°, 60°) или тригонометрической функцией – синусом или тангенсом. Кроме того, при решении этих задач необходимо было использовать разные формулы вычисления значений величин, характеризующих цилиндр (либо формулу объема, либо формулу площади боковой поверхности цилиндра), а также уметь вычислять либо площадь, либо периметр сечения цилиндра (осевого сечения или сечения, параллельного оси).

Анализ результатов выполнения заданий по данной теме показывает, что указанные выше различия в условиях задач, как и в 2005 году, не приводят к каким-либо заметным различиям в успешности их решения. Число верных ответов достаточно равномерно по отношению к подтипам задач колеблется от 5,2% до 23,1% (в 2005 г. от 6 до 21%), в группе сильных учащихся результаты 15,8%-66,9% (в 2005 г. – 18,2%-63,6%), а в группе слабых – 0% -1,8% (в 2005 г. – 0%-1,9%).

При этом даже по одинаковым задачам, различающимся только числовыми данными, результаты получены очень разные. Например, по трем аналогичным задачам было дано 5,6%, 13% и 22% верных ответов.

Следует отметить, что задачи этой серии, хоть и не являются типичными и часто использующимися в практике преподавания, однако, и незнакомой данную в них конфигурацию назвать нельзя. Для успешного решения указанных задач достаточно было владеть основными понятиями стереометрии и уметь вычислять элементы прямоугольных треугольников. Поэтому слабые учащиеся так же плохо справились с этими задачами, как и с задачами по планиметрии, а у сильных учащихся результаты намного лучше, чем по планиметрическим заданиям.

Для второй серии задач на цилиндр ключевым моментом решения являлось выявление угла между двумя скрещивающимися прямыми, например, в задаче: «Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $2\sqrt{6}$. Отрезки AB и CD – диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA_1 – его образующая. Известно, что AD = $\sqrt{3}$. Найдите косинус угла между прямыми A_1C и BD». Все задачи этой серии были аналогичными и различались лишь требованием найти синус или косинус искомого угла. Вычисления были связаны с применением теоремы Пифагора и определением синуса или косинуса острого угла. Действия над числами, производимые в ходе вычислений, тоже не различались по сложности. Видимо, этим объясняется самый маленький разброс результатов из всех серий стереометрических задач. Всего было получено 9,2-19,9% верных ответов, в группе сильных – 28,7-61,5%, в группе слабых – 0-1,7%. При этом минимальный процент верных ответов к задачам данной серии несколько выше, чем для задач других серий (и на цилиндр, и на конус), а максимальный – несколько ниже. Применение понятия угла между скрещивающимися

прямыми обычно затрудняет учащихся гораздо больше, чем применение понятия угла между прямой и плоскостью или угла между плоскостями. Это особенно справедливо для менее подготовленных выпускников, так как такие задачи крайне редко предлагаются учащимся общеобразовательных классов в процессе обучения. Это показывают и результаты решения задач данной серии группой слабых учащихся. Здесь не только получены самые низкие границы процентов верных ответов, но и самое большое число минимальных результатов: менее 0,1% по 8 задачам, 0,1-0,4% по 6 задачам, по одной задаче 1,7% верных ответов.

Конус. Задачи на конус также были представлены двумя сериями. Решение всех задач первой серии предполагало рассмотрение одной и той же конфигурации в конусе. Данные по условию величины являлись элементами треугольника, составленного из двух образующих конуса и хорды основания. В большей части задач требовалось найти угол между плоскостями, поэтому ключевым моментом решения являлось выявление линейного угла искомого двугранного угла, как например, в задаче: «Угол между образующими CA и CB конуса равен 60°, высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса». Затем вычисления производились в прямоугольном треугольнике, один из катетов которого – высота конуса, а один из острых углов – искомый угол.

В некоторых задачах требовалось найти расстояние от точки до плоскости, поэтому ключевым моментом решения являлось выявление отрезка, длина которого является искомым расстоянием: «В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса C проведена плоскость так, что угол при вершине C образовавшегося в сечении треугольника равен 60°. Найдите расстояние от центра основания конуса O до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $\frac{8}{3}$». Вычисление искомого расстояния проводилось в том же прямоугольном треугольнике, что и в задачах первого типа, но вместо острого угла нужно было вычислить высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.

По задачам первого типа получены те же результаты, что и по всем задачам этой серии: в целом 5,7%-22,8%, в группе сильных – 13,7%-55,1%, в группе слабых – 0,4%-4,3%. Хотя эти задачи различались только числовыми данными и иногда формулировкой условия, тем не менее, наблюдается большой разброс результатов их выполнения. Возможно, это, скорее, связано не с трудностью задач, а с составом выборки учащихся, решавших те или иные варианты.

Результаты по трем задачам второго типа на конус относительно высокие: 14,8%-18,9% (47,9%-52,4% – в группе сильных, 0,3%-1,9% – в группе слабых). Однако результатов выполнения всего трех задач явно недостаточно, чтобы делать какие-либо выводы, видимо, нужно иметь больше результатов решения таких задач.

Задачи второй серии на конус были построены на такой же конфигурации, что и задачи первой серии, но несколько отличались от них вычислительной частью. В большинстве из них либо в условии, либо в требовании говорилось об угле между плоскостью основания и плоскостью сечения цилиндра, и, соответственно, нужно было определить линейный угол указанного двугранного угла. В четырех задачах требовалось найти расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения. Здесь (как и в трех задачах первой серии) ключевым моментом решения являлось выявление отрезка, длина которого являлась искомым расстоянием. Вычислительные части решения задач в данной серии несколько отличались друг от друга. В них использовались разные данные, приведенные в условии, и искомые величины (высота конуса, хорда основания, образующая конуса, угол между образующими или между

образующей и хордой, периметр сечения конуса, площадь сечения, отношение высоты конуса к образующей). Кроме того, равнобедренный треугольник, который получался в сечении конуса, иногда был прямоугольным, иногда – остроугольным или тупоугольным, что требовало проведения различных вычислений. По этим задачам получен самый большой разброс результатов из всех серий стереометрических задач: всего 6%-27% верных ответов, в группе сильных – 18%-64%, в группе слабых – 0%-2%. При этом, в отличие от задач первой серии, результаты по задачам на вычисление расстояния от точки до плоскости были самыми низкими: 6%-11%, тогда как по задачам на угол между плоскостями было получено 8%-27% верных ответов.

Ниже в сводной таблице 2.13 представлены результаты выполнения всех типов стереометрических задач, о которых говорилось выше, а в таблице 2.14 – результаты выполнения всех геометрических задач в вариантах КИМ 2005-2007 гг.

Таблица 2.13

Результаты выполнения задач по стереометрии в 2005-2007 гг. (в %)

Основное содержание заданий	Состав учащихся	2005	2007
Цилиндр (угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями)	в целом в группе сильных в группе слабых	6-21 18-64 0-2	5-23 16-67 0-2
Цилиндр (угол между скрещивающимися прямыми)	в целом в группе сильных в группе слабых		9-20 29-62 0-2
Конус (угол между двумя плоскостями)	в целом в группе сильных в группе слабых		6-27 14-64 0-4
Конус (расстояние от точки до плоскости)			
3 задачи из 1 серии	в целом в группе сильных в группе слабых		15-19 48-52 0,3-2
4 задачи из 2 серии	в целом в группе сильных в группе слабых		6-11 18-26 0,4-2

Таблица 2.14

Результаты выполнения заданий повышенного уровня по стереометрии в 2005-2007 гг. (в %)

Состав учащихся	2005 г.	2006 г.	2007 г.
в целом	3-29 (3-23)	3-22	**5-27 (5-23)**
сильные	12-69	10-57	**14-67**
слабые	0-3	0-2	**0-4**

В целом со стереометрическими задачами в июне 2007 года справились 5-27% учащихся, при этом 27% верных ответов получено только по одной задаче, а по всем остальным – процент верных ответов не превышает 23%. Таким образом, согласно данным таблицы 2.14, результаты решения стереометрических задач в 2007 г. и в 2005–2006 гг. существенно не отличаются.

Ниже в сводной таблице 2.15 представлены результаты всех задач по геометрии в 2005-2007 гг.

Таблица 2.15

Результаты выполнения заданий повышенного уровня по планиметрии и стереометрии в 2005-2007 годах (в %)

Состав учащихся		2005 г.	2006 г.	2007 г.
В целом	планиметрия	2-18	4-23	2-27
	стереометрия	3-29 (3-23)	3-22	5-27 (5-23)
Группа сильных	планиметрия	6,5-54	11-56	4,5-69
	стереометрия	12-69	10-57	14-67
Группа слабых	планиметрия	0-3	0-2	0-5
	стереометрия	0-3	0-2	0-4

Из таблицы 2.15 видно, что в целом с задачами по планиметрии и по стереометрии учащиеся справляются примерно с одинаковым успехом. Проценты выполнения задач довольно близки, при этом весьма низкие. Естественно, в группе сильных учащихся результаты намного выше средних, а в группе слабых они близки к 0, поскольку задания по геометрии являются «абитуриентскими», и многие учащиеся, которым не нужна оценка по математике для поступления в вуз, просто не готовятся к выполнению на экзамене геометрических заданий.

2.4.2.2. Результаты выполнения стереометрических задач высокого уровня, включенных в варианты КИМ-2007

Каждый вариант КИМ-2007 содержал одну стереометрическую задачу высокого уровня сложности (С4). Как и в предыдущие годы, тематика всех задач С4 была одна и та же – комбинации многогранников. С помощью этих задач проверялись знание свойств многогранников и их сечений, взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, умение применять при вычислении искомых величин данные, приведенные в условии задачи, а также способность взглянуть на заданную геометрическую конфигурацию с разных позиций, например, за основание данного тетраэдра принять его боковую грань.

Сложность заданий С4 в 2007 году, как обычно, определялась заданной геометрической конфигурацией. Эта сложность была сопоставима со сложностью геометрических заданий, традиционно предлагающихся на вступительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

В задачах 2007 года можно выделить три различные геометрические конфигурации, являющиеся комбинациями: 1) прямоугольного параллелепипеда и пирамиды; 2) двух пирамид; 3) прямой призмы (основанием которой является равнобедренный треугольник или ромб) и пирамиды. Ниже приведены примеры формулировок этих заданий.

1) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на сторонах AD, A_1B_1, B_1C_1 его оснований лежат

соответственно точки *L*, *K*, *M* так, что $AL:LD=2:5$, $A_1K:KB_1=2:3$, $B_1M:MC_1=5:2$. Во сколько раз объем параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной *K* и основанием $LDMB_1$?

2) В основании первой пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C=45^{\circ}$, $BC=6\sqrt{2}$, $AC=18$. Боковое ребро AD перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра *DB* параллельно прямым *BC* и *AD*, является основанием второй пирамиды. Ее вершина *T* – основание высоты *BT* треугольника *ABC*. Во сколько раз объем первой пирамиды больше объема второй пирамиды?

3) В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, $AB=AC=5$, $BC=6$. Высота призмы равна 12. Сечение призмы плоскостью, проходящей через вершину A и перпендикулярной прямой BC_1, является основанием пирамиды, вершина T которой лежит на ребре CC_1 так, что $CT:TC_1=5:1$. Найдите объем этой пирамиды.

В 2007 г. с задачами С4 справились (получили 4 или 3 балла – допустили незначительные ошибки) по вариантам КИМ от 0,9% до 1,5% участников ЕГЭ, что примерно соответствует результатам 2005 года и чуть выше соответствующих процентов 2006 года. Эти проценты и в предыдущие годы были небольшими и лежали в диапазоне 0,3% до 2%. Напомним, что эти задания рассчитаны на наиболее способных и подготовленных выпускников. Поэтому, как и ожидалось, с ними практически не справились учащиеся с невысокой математической подготовкой и только доли процента справились среди учащихся с «хорошей» подготовкой, в то же время среди отличников эти задания выполняются значительно более успешно. Так, в группе участников ЕГЭ, получивших оценку «5», в 2007 г. по вариантам КИМ с задачами С4 справились от 5% до 15%. Это показывает, что выбор тематики и уровня сложности самых трудных задач по геометрии осуществляется разумно.

Несмотря на невысокие результаты выполнения заданий С4, разработчики вариантов КИМ считают, что они выполняют свою функцию, позволяя выделить группу наиболее подготовленных выпускников. Поэтому предполагается в будущем сохранить сложность теоретической и практической частей стереометрических задач высокого уровня. При этом предлагать в условии задачи такие конфигурации, свойства которых учащиеся смогут определить с помощью проведения некоторых рассуждений и/или несложных вычислений, основанных на программном материале, включенном в обязательный минимум содержания образования по математике.

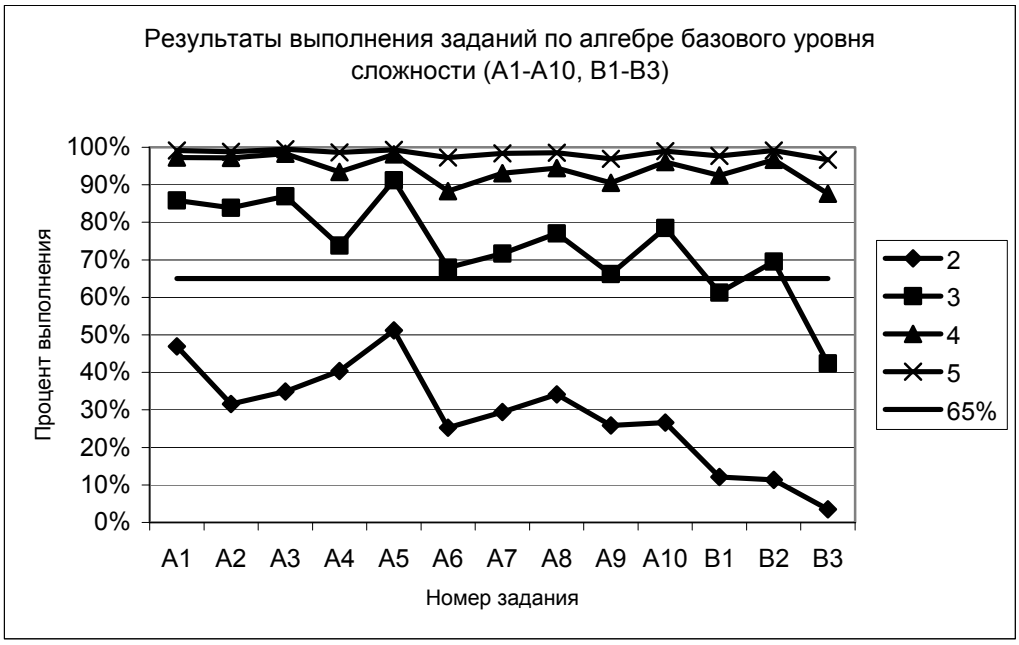
2.5. Анализ результатов выполнения заданий группами выпускников с различным уровнем математической подготовки

Результаты экзамена убедительно свидетельствуют о существенных различиях в овладении курсом математики выпускниками средней школы. При интерпретации этих результатов представляет интерес не только описание на основе средних показателей овладения этим материалом в целом всеми участниками экзамена, но и содержательное описание знаний и умений учащихся, продемонстрировавших различные уровни подготовки по математике. В частности, эта информация интересна для приемных комиссий тех вузов, которые осуществляют прием абитуриентов в свои образовательные учреждения, принимая во внимание результаты сдачи ЕГЭ.

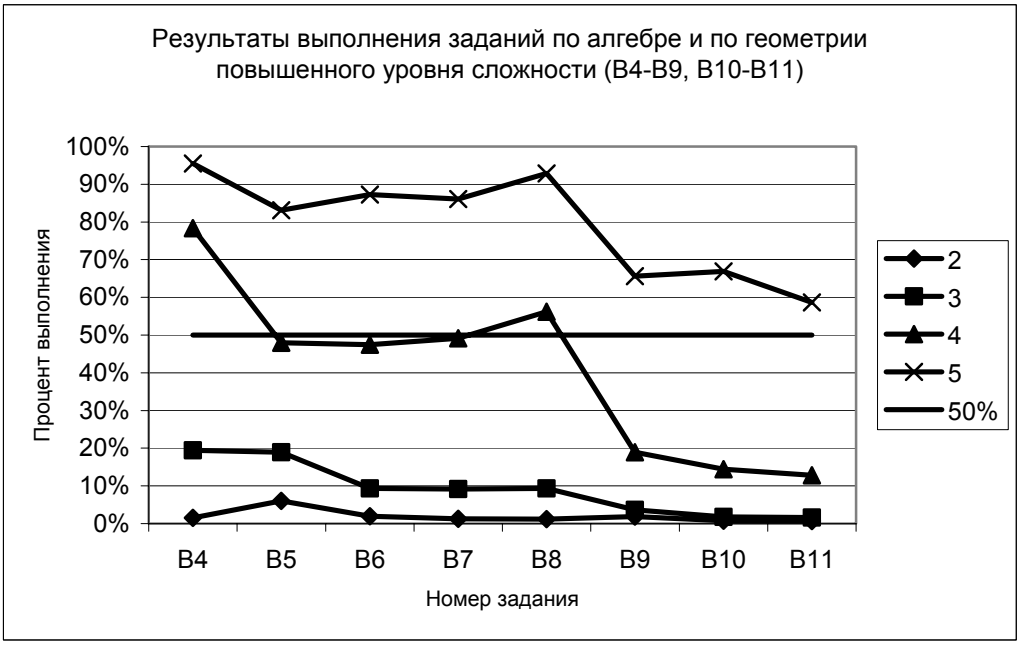
Определение уровня математической подготовки выпускников проводилось на основе соответствия, установленного между тестовыми баллами, выставленными учащимся за выполнение всех заданий работы, и четырьмя выделенными уровнями этой подготовки:

«неудовлетворительный»	– 0-35 баллов (оценка «2»);
«удовлетворительный»	– 36-54 балла (оценка «3»);
«хороший»	– 55-73 балла (оценка «4»);
«отличный»	– 74-100 баллов (оценка «5»).

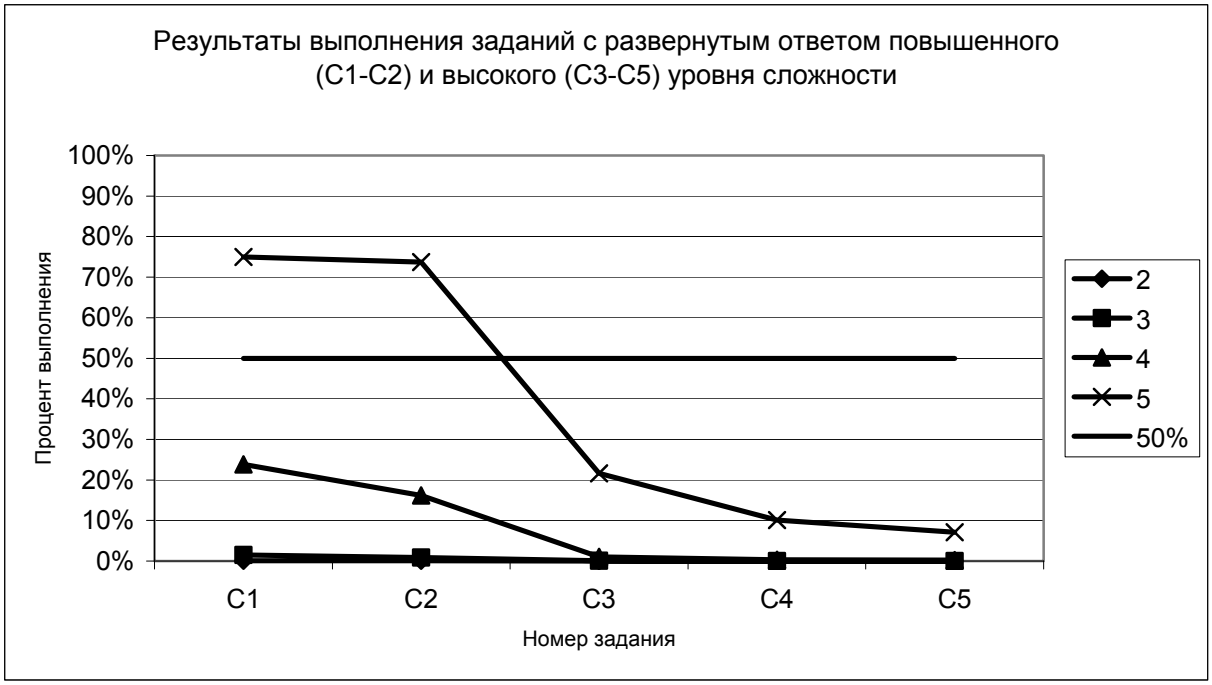
Ниже на рисунках 2.2 (а, б, в) представлены результаты выполнения заданий разной сложности в вариантах КИМ-2007 учащимися, показавшими различные уровни математической подготовки (получили по математике оценки: «2», «3», «4», «5») .



а)



б)



в)

Рис. 2.2 Результаты выполнения экзаменационной работы 2007 года выпускниками с различным уровнем подготовки

2.5.1. Характеристика состояния подготовки по курсу алгебры и начал анализа выпускников, показавших различные уровни общей математической подготовки

Каждый вариант работы содержал 22 алгебраических задания разного уровня сложности (13 заданий базового уровня сложности, 10 заданий – повышенного и 2 задания – высокого), проверявших владение материалом различных содержательных линий программы и стандарта по математике:

- тождественные преобразования выражений;
- уравнения, неравенства, системы неравенств;
- функции.

В приведенной ниже таблице 2.16 описаны элементы содержания и умения по каждой из содержательных линий программы по математике (курса В) и стандарта 2004 г., которые на базовом уровне освоены группами выпускников, показавших разные уровни математической подготовки. При этом предполагалось, что элемент содержания усвоен группой учащихся, показавших одинаковый уровень подготовки, на базовом уровне, если с соответствующим заданием справляются не менее 65%, на повышенном уровне – если с соответствующим заданием справляются не менее 50%.

Таблица 2.16

Описание алгебраической подготовки участников экзамена в 2007 году, показавших различные уровни общей математической подготовки

Уровень математической подготовки участников экзамена	Описание алгебраической подготовки
«Неудовлетворительный»: тестовый балл 1-35 – оценка «2». Процент выпускников 20,9%	В целом, выпускники этой группы фактически не овладели ни одним из элементов содержания, проверявшихся на базовом уровне[5].
«Удовлетворительный»: тестовый балл 36-54 – оценка «3». Процент выпускников 41,9%	В целом, эта группа выпускников овладела 9-11 элементами содержания из 13, которые контролировались с помощью заданий базового уровня сложности в вариантах КИМ[5]. Эта категория выпускников на базовом уровне овладела умением проводить преобразования радикалов, степеней и логарифмов с использованием ограниченного набора формул. Они умеют решать простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства, решать тригонометрические и комбинированные уравнения, дробно-рациональные неравенства, а также читать по графику свойства функций и исследовать (аналитически) некоторые свойства. При этом значительная часть учащихся не усвоила: преобразования тригонометрических выражений, решение иррациональных уравнений и нахождение области определения сложной функции. В целом, эта группа выпускников не справилась ни с одним заданием повышенного уровня.
«Хороший»: тестовый балл 55-73 – оценка «4». Процент выпускников 29,6%	В целом, эта группа выпускников овладела всеми элементами содержания, проверявшимися на базовом уровне: они умеют преобразовывать все изученные виды выражений, решать все изученные виды уравнений и неравенств, исследовать свойства функций[5]. Эта группа выпускников овладела 3-4 элементами содержания из 7-ми, освоение которых проверялось на повышенном уровне[6]. Они овладели умениями: – преобразовывать выражения и находить их значения; – применять понятие периодичности для нахождения значений периодической функции; применять геометрический смысл производной для решения задач; – решать системы двух уравнений с двумя неизвестными.
«Отличный»: тестовый балл 74-100 – оценка «5». Процент выпускников 7,6%	Эта группа выпускников успешно овладела всеми элементами содержания на базовом[5] и повышенном[6] уровнях, которые проверялись с помощью вариантов КИМ-2007. Они овладели не только методами решения всех математических задач повышенного уровня, включенных в варианты КИМ-2007, но и показали умение математически грамотно и обоснованно записать свое решение при выполнении заданий повышенного уровня с развернутым ответом.

2.5.2. Характеристика состояния геометрической подготовки выпускников, продемонстрировавших различные уровни математической подготовки

Вариант КИМ включал только три задачи по геометрии, две – повышенного уровня сложности, требующих краткого ответа, и одна – высокого уровня, требующая записи развернутого обоснованного ответа. В связи с тем, что при выполнении задач повышенного уровня не требовалось приводить решение, не удалось выделить конкретные знания и умения, которыми на повышенном уровне овладели или не

[5] См. рис.2.2 а) задания А1-А10 и В1-В3.
[6] См. рис.2.2 б) задания В4-В8 и рис.2.2 в) задания С1 и С2.

овладели участники экзамена. Не удалось это сделать и на основе выполнения учащимися задач высокого уровня, так как для решения каждой из этих задач требовалось применить комплекс знаний и умений из различных разделов курса геометрии основной и старшей школы. Поэтому анализ выполнения геометрических заданий группами учащихся, различающихся уровнем математической подготовки, был направлен на выяснение потенциальной возможности каждой из этих групп учащихся справляться с геометрическими заданиями повышенной и высокой сложности.

Ниже в таблице 2.17 представлены результаты (средние проценты) выполнения трех геометрических заданий группами участников экзамена, различающихся уровнем математической подготовки, и всеми участниками ЕГЭ-2007.

Таблица 2.17

Средние проценты выполнения геометрических задач повышенного и высокого уровня группами учащихся, различающихся уровнем математической подготовки

Уровень математической подготовки участников экзамена	**Задача по стереометрии повышенного уровня (B10)**[7]	**Задача по планиметрии повышенного уровня (B11)**	**Задача по стереометрии высокого уровня (C4)**
«Неудовлетворительный»: тестовый балл 0-35 – оценка «2». Процент выпускников 20,9%	0,8%	0,7%	0,0%
«Удовлетворительный»: тестовый балл 36-54 –оценка «3». Процент выпускников 41,9%	1,7%	1,6%	0,01%
«Хороший»: тестовый балл 55-73 –оценка «4». Процент выпускников 29,6	14,4%	12,8%	0,3%
«Отличный»: тестовый балл 74-100 –оценка «5». Процент выпускников 7,6%	66,9%	58,7%	10,1%
В целом все участники	**9,8%**	**8,7%**	**0,8%**

Как и следовало ожидать, никто из выпускников с неудовлетворительным уровнем математической подготовки (получили оценки «2») не сумел справиться с задачей высокого уровня и менее одного процента (0,67%-0,78%) справились с задачами повышенного уровня в вариантах КИМ, составленных по разным планам. Чуть выше результаты у выпускников с удовлетворительным уровнем подготовки (оценка «3»): задачу высокого уровня сумели решить сотая доля процента (0,01%), с задачами повышенного уровня справились менее 2% (1,62%-1,74%). Низкие результаты, показанные в 2005-2007 гг., не удивляют, так как не только задачи высокого, но и повышенного уровня на таких выпускников не рассчитаны.

Невысоки результаты выполнения геометрических заданий у учащихся, показавших «хороший» уровень подготовки. Из них в среднем около 13% продемонстрировали возможность справляться с задачами, составленными на материале курса планиметрии, и около 14% – со стереометрическими задачами повышенного уровня. Совсем небольшой процент в этой группе выпускников – в среднем не более половины процента (0,31%) справились с задачами высокого уровня сложности, которые на них не рассчитаны. По сравнению с 2005 и 2006 гг.

[7] См. рис. 2.2. б) и 2.2. в) задания B10, B11 и C4.

существенных изменений в количестве учащихся этой категории, успешно справляющихся с задачами по геометрии, не наблюдается.

По сравнению с другими категориями участников экзамена учащиеся с высоким уровнем математической подготовки демонстрируют и более высокий уровень геометрической подготовки. С рассчитанной на этих учащихся задачей высокого уровня (С4) в 2007 году в целом справились 10%. Данные таблицы 2.17 показывают, что задача успешно выполнила свою функцию, позволив выделить из группы наиболее подготовленных выпускников тех учащихся, которые достигли высокого уровня геометрической подготовки. При этом следует отметить, что даже в этой группе наиболее продвинутых выпускников с задачами по планиметрии справляются (59%) меньше учащихся, чем справляются (67%) с задачами по стереометрии.

2.6. Выводы и рекомендации

В 2007 году ЕГЭ по математике сдавали 605757 выпускников из 77 регионов России, что составило 52,89% всех выпускников средней (полной) школы. В 2006 г. было 623493 ученика из 73 регионов, что составило 48% выпускников. Таким образом, в 2007 г. увеличилось число регионов и процент выпускников школы, прошедших итоговую аттестацию по математике в форме ЕГЭ.

1. Введение в практику работы школы такой формы итоговой аттестации, как ЕГЭ, способствовало повышению уровня математической подготовки выпускников средней школы. Этот вывод следует из результатов 2005-2006 гг. и подтверждается тем, что в 2007 году была повышена норма выставления удовлетворительной оценки («3»), а процент неудовлетворительных оценок не увеличился. Кроме того, повысилась подготовка той части выпускников, которые в 2007 году получили удовлетворительную оценку «3»: они овладели 9-11 умениями из 13, проверявшихся на базовом уровне (в 2006 году эта совокупность учащихся овладела только 6-8 умениями из 13).

2. Результаты выполнения вариантов КИМ-2007 позволили дифференцировать выпускников по уровню показанной ими математической подготовки на четыре группы: «отличный» уровень (7,6%); «хороший» (29,6%); «удовлетворительный» (41,9%); «неудовлетворительный» (20,9%). На основе результатов выполнения заданий, различающихся по тематике и сложности, удалось определить, достигаются ли основные требования, представленные в основных нормативных документах (стандарт 2004 г. и программа по математике), каждой из этих групп учащихся.

3. В ходе многолетнего эксперимента по введению ЕГЭ удалось определить содержание, уровень сложности и типы заданий базового и высокого уровня, которые конкретизируют требования стандарта 2004 г. Это способствовало разработке банка образцов заданий, выполнение которых свидетельствует о достижении учащимися контролируемых требований. В 2007 г. банк образцов был дополнен заданиями, которые впервые в рамках ЕГЭ проверяли ряд требований стандарта 2004 г. На основе созданного банка заданий и по результатам их выполнения выделены требования, которые доступны большинству выпускников средней школы, а также требования, доступные более подготовленным учащимся.

4. Анализ решений, приведенных участниками экзамена к заданиям с развернутым ответом, показал, что они в основном используют стандартные математические методы даже в тех случаях, когда условие предполагает возможность использовать рациональный прием, позволяющий значительно упростить математические выкладки и, соответственно, сократить время на выполнение задания. Эти же наблюдения были зафиксированы в международном исследовании математической подготовки выпускников средней школы (TIMSS Advanced-2007),

изучавших углубленный курс математики, в котором принимали участие российские учащиеся.

5. Результаты участников ЕГЭ-2007 по математике, различающих типом и расположением образовательного учреждения, а также гендерными различиями, как и в 2005-2006 гг., продемонстрировали наличие связи между выполнением вариантов КИМ и некоторыми из этих факторов:

а) выпускники дневных общеобразовательных школ значительно лучше справились с работой (средний тестовый балл 48,63), чем учащиеся вечерних школ, показавших по сравнению с выпускниками всех остальных категорий образовательных учреждений очень низкий уровень математической подготовки (средний тестовый балл 31,41);

б) в целом результаты, показанные девушками и юношами, не имеют значимых различий;

в) результаты, показанные выпускниками городских школ, в основном, постепенно, хотя и незначительно, возрастают с увеличением численности населения в городах;

г) результаты выпускников школ поселков городского типа и городских школ выше среднего результата (средний тестовый балл 48,39), показанного всеми участниками ЕГЭ-2007, в то же время результаты выпускников школ сельского типа (44,71) существенно ниже этого показателя.

Итоги ЕГЭ-2007 позволяют высказать некоторые рекомендации, направленные на совершенствование процесса преподавания математики и уровня подготовки учащихся.

1. Анализ результатов ЕГЭ-2007 показал положительную динамику в овладении большинством выпускников требованиями стандарта 2004 г. на базовом уровне. Это позволило поднять границу выставления положительной оценки «3». В 2007 году эта оценка выставлялась при верном выполнении не менее 7-ми заданий работы (ранее было 5-6 заданий). Наряду с этим обращаем внимание администрации школ и учителей математики, что, как и в 2005-2006 гг., около 20% выпускников получили неудовлетворительную оценку, которая свидетельствует о том, что они не усвоили требования стандарта на базовом уровне. В связи с этим, учитывая опыт работы в рамках уровневой дифференциации, представляется продуктивным, чтобы в старшей школе учителя математики для учащихся со слабой подготовкой разрабатывали индивидуальную стратегию подготовки к итоговой аттестации по математике, ориентированную на достижение требований стандарта, действительно доступных большинству старшеклассников. Поэтому целесообразно составить не только перечень доступных для усвоения требований стандарта, но и открытые для учащихся образцы заданий, конкретизирующих эти требования.

2. Анализ решений, предложенных участниками экзамена к заданиям с развернутым ответом, позволил выявить некоторые недочеты в подготовке выпускников, продемонстрировавших хорошую и отличную подготовку по математике. Одним из основных недочетов является жесткое следование изученным алгоритмам, не обращая внимания на особенности условия поставленной задачи, позволяющие использовать более рациональный метод решения. В процессе обучения необходимо больше внимания уделять развитию самостоятельности мышления учащихся. Реализация этой задачи в практике работы школы является одним из путей повышения качества математического образования.

Приложение 2.1

Общий план экзаменационной работы ЕГЭ 2007 года по математике

	Проверяемые элементы содержания и виды деятельности	Уровень сложности задания[8]	Примерное время выполнения задания (мин)	Форма задания[9]	Максимальный балл за выполнение задания	Реальные результаты (средний процент) выполнения различных заданий одной и той же тематики, включенных в варианты КИМ-2007 (см. Приложение 2.2)
	ЧАСТЬ 1					
1.	Владение понятием степени с рациональным показателем, умение выполнять тождественные преобразования и находить их значения	Б	3	ВО	1	76,5%; 85,4%; 86,4%
2.	Умение выполнять тождественные преобразования с корнями и находить их значение	Б	3	ВО	1	72,7%; 79%; 85,4%
3.	Умение выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений	Б	3	ВО	1	77,5%; 80,1%; 81,5%
4.	Умение читать свойства функции по графику и распознавать графики элементарных функций	Б	3	ВО	1	68,7%; 80,1%; 83,6%
5.	Умение находить производную функции	Б	3	ВО	1	79,8%; 90,0%
6.	Умение находить множество значений функции	Б	3	ВО	1	40,3%; 73,0%; 75,7%
7.	Умение использовать график функции при решении неравенств (графический метод решения неравенств)	Б	2	ВО	1	59,3%; 71,3%
8.	Умение находить область определения сложной функции	Б	3	ВО	1	64,0%
9.	Умение решать неравенства с одной переменной на основе свойств функции	Б	3	ВО	1	66,8%; 80,8%
10.	Умение применять общие приёмы решения уравнений	Б	3	ВО	1	69,8%; 73,0%
11.	Умение решать уравнения с использованием равносильности уравнений	Б	4	КО	1	71,7%; 71,8%
12.	Умение выполнять тождественные преобразования выражений и находить их значение	Б	4	КО	1	44,7%; 52,9%; 54,1%
13.	Умение применять общие приемы решения уравнений	Б	4	КО	1	54,0%; 67,3%
	ЧАСТЬ 2					
14.	Умение решать системы уравнений, содержащих одно или два показательных уравнения (логарифмических, иррациональных, тригонометрических)	П	5	КО	1	38,7%; 39,5%; 43,3%
15.	Умение применять геометрический смысл производной	П	5	КО	1	18,6%; 31,1%

[8] Обозначение сложности задания: Б – базовый, П – повышенный, В – высокий.

[9] Обозначение формы задания: ВО – с выбором ответа из 4-х альтернатив, КО – с кратким ответом в виде числа, РО – с развернутым ответом.

16.	Умение выполнять тождественные преобразования выражений и находить их значение	П	4	КО	1	19,5%; 27,0%; 29,9%
17.	Умение использовать несколько приёмов при решении уравнений	П	6	КО	1	21,5%; 22,9%; 30,0%
18.	Умение использовать свойство периодичности функции для решения задач	П	5	КО	1	25,2%; 27,5%; 30,0%
19.	Умение решать текстовую задачу, составляя математическую модель предложенной ситуации	П	9	КО	1	11,0%; 18,8%
20.	Умение решать стереометрические задачи	П	11	КО	1	9,8%; 10,5%
21.	Умение решать планиметрические задачи	П	15	КО	1	9,3%; 10,1%
22.	Умение исследовать свойства сложной функции	П	15	РО	2	10,8%; 13,9%; 14,7%
23.	Умение использовать несколько приёмов при решении уравнений	П	15	РО	2	8,0%; 11,3%; 11,9%
	ЧАСТЬ 3					
24.	Умение решать неравенства с параметром	В	30	РО	4	1,2%; 1,7%; 2,3%
25.	Умение решать стереометрическую задачу на комбинацию геометрических тел (многогранников и тел вращения)	В	40	РО	4	0,4%; 0,9%; 1,5%
26.	Умение решать и проводить исследование решения системы, содержащей уравнения разного вида	В	40	РО	4	0,3%; 0,6%; 0,7%
		Б-13, П-10, В-3	240 мин	ВО-10, КО-11, РО-3	37 баллов	

Приложение 2.2

Образцы заданий базового уровня сложности

Задание №1

Тип 1. Выполните действия $6c^{\frac{3}{7}} + 4\left(c^{\frac{1}{7}}\right)^3$. 76,5%[10]

Тип 2. Упростите выражение $\frac{11^{1,2}}{11^{0,6}}$. 85,4%

Тип 3. Упростите выражение $b^{-3,4} \cdot 5b^{0,2}$. 86,4%

Задание №2

Тип 1. Вычислите $\frac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$. 72,7%

Тип 2. Вычислите $\sqrt[3]{0,064 \cdot 125}$. 79,0%

Тип 3. Упростите выражение $\sqrt[3]{32k} \cdot \sqrt[3]{2k^2}$. 85,4%

Задание№3

Тип 1. Найдите значение выражения $4 \cdot 3^{log_3 5}$. 77,5%

Тип 2. Вычислите $\log_2 80 - \log_2 5$. 80,1%

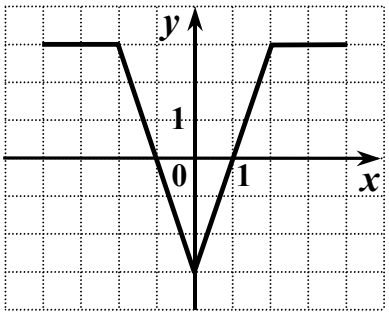
Тип 3. Вычислите $\log_3 45 + \log_3 0,6$. 81,5%

[10] - Здесь и далее приводятся средние проценты выполнения заданий данного типа.

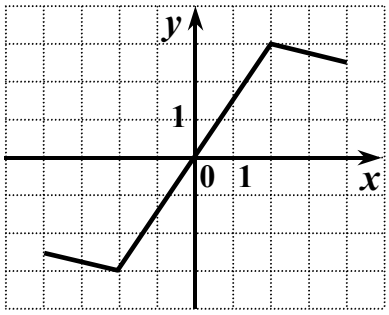
Задание №4

Тип 1. На одном из рисунков изображен график чётной функции. Укажите этот рисунок. 68,7%

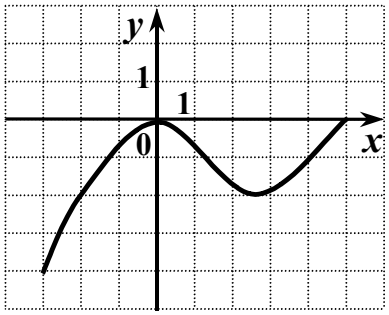
1)



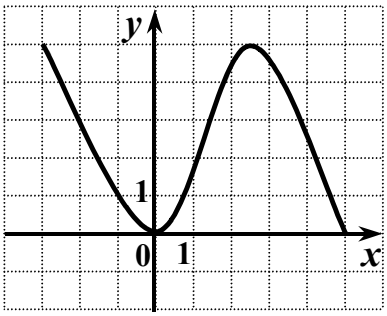
2)



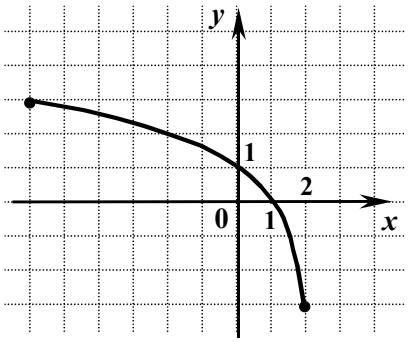
3)



4)

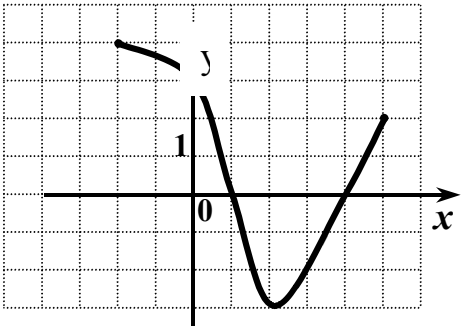


Тип 2. Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



80,1%

Тип 3. Функция задана графиком. На каком из указанных промежутков она возрастает?



83,6%

Задание №5

Тип 1. Найдите производную функции $y = 11x^2 + \cos x$. 79,8%

Тип 2. Найдите производную функции $y = 12x^3 - e^x$. 89,9%

Тип 3. Найдите производную функции $y = x^7 + 0,8x^5 - 6$. 90,0%

Задание №6

Тип 1. Найдите множество значений функции $y = 1{,}5 + \log_{2,5} x$. 40,3%

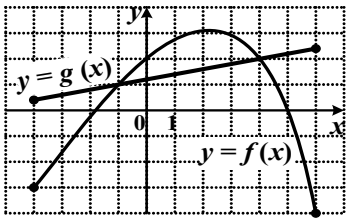
Тип 2. Какое из следующих чисел входит в множество значений функции $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3$? 73,0%

1) -12 2) -2 3) -3 4) -4

Тип 3. Найдите множество значений функции $y = 3\sin x$. 75,7%

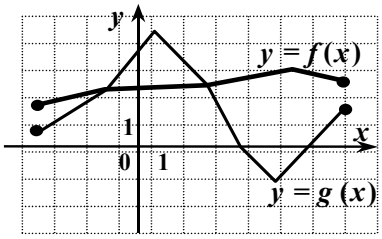
Задание №7

Тип 1. На рисунке изображены графики функций *y = f(x)* и *y = g(x)*, определенных на промежутке $[-4;6]$. Укажите те значения аргумента, для которых выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$.



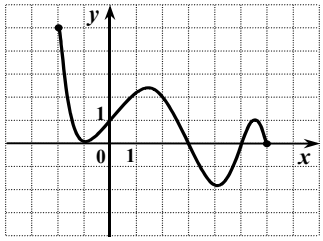
59,3%

Тип 2. На рисунке изображены графики функций *y = f(x)* и *y = g(x)*, заданных на промежутке $[-3;6]$. Укажите те значения *x*, для которых выполняется неравенство $f(x) \ge g(x)$.



71,3%

Тип 3. Функция задана графиком. Укажите промежуток, в котором она принимает только отрицательные значения.



84,6%

Задание №8

Тип 1. Решите неравенство $\frac{(x-1)(x+3)}{9x} > 0$. 67,9%

Тип 2. Решите неравенство $\frac{3x(x-5)}{x+3} \ge 0$. 70,9%

Тип 3. Решите неравенство $\frac{5+x}{(x-7)(x-4)} \le 0$. 74,6%

Задание №9

Тип 1. Решите уравнение $\sin x - \frac{1}{2} = 0.$ 67,7%

Тип 2. Решите уравнение $tg5x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$ 70,0%

Тип 3. Решите уравнение $\cos\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ 76,3%

Задание №10

Тип 1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x} - \frac{1}{27}}.$ 64,0%

Тип 2. Решите неравенство $\log_{0,6}(x+5) \le 0.$ 66,8%

Тип 3. Решите неравенство $8^x \le 2^{4x+15}.$ 80,8%

Задание №11

Тип 1. Найдите значение выражения $3\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$, если $\cos\alpha = -0,5$. 44,7%

Тип 2. Найдите значение выражения $1 - 3\sin^2 x$, если $\cos^2 x = 0,9$. 52,9%

Тип 3.

Найдите значение выражения $5 - 2tg^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0,4.$ 54,1%

Задание №12

Тип 1. Решите уравнение $3^{x+2} + 6 \cdot 3^x = 5.$ 69,8%

Тип 2. Решите уравнение $8 \cdot 3^{\log_3 x} = 13x - 6.$ 71,7%

Тип 3. Решите уравнение $\log_7 x + \log_7 6 = \log_7 18.$ 71,8%

Тип 4. Решите уравнение $5^{4x+13} = 25.$ 73,0%

Задание №13

Тип 1. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x.$ 54,0%

Тип 2. Решите уравнение $5 - x = \sqrt{1+x}.$ 67,3%

Замечание.

Задания №№ 1-10 с выбором ответа (тип А), а задания №№ 11-13 – с кратким ответом (тип В).