# 2. МАТЕМАТИКА

### 2.1. Характеристика контрольных измерительных материалов

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) совмещает два экзамена – выпускной за среднюю школу и вступительный в высшие учебные заведения (вузы), которые проводятся с разными целями и соответственно имеют значительные различия в содержании проверяемого учебного материала. В связи с этим ЕГЭ должен обеспечивать как итоговую аттестацию выпускников средней школы, ради которой проводится выпускной экзамен, так и отбор учащихся, наиболее подготовленных к обучению в вузах, ради чего проводится вступительный экзамен. Поэтому в рамках ЕГЭ осуществлялась проверка овладения материалом курса алгебры и начал анализа 10-11 классов, усвоение которого проверяется на выпускном экзамене за среднюю школу, а также материалом некоторых тем курса алгебры основной школы и геометрии основной и средней школы, которые традиционно контролируются на вступительных экзаменах в вузы. При этом в содержание проверки были включены только те вопросы, которые входят в основной нормативный документ - **минимум содержания основной и средней школы по математике.**

Материал, усвоение которого проверялось при проведении ЕГЭ 2003 г., включал элементы содержания из всех крупных блоков, выделенных в программе 10-11 классов: выражения и преобразования, уравнения и неравенства, функции, числа и вычисления, геометрические фигуры и их свойства и измерение геометрических величин. Различная тематика и различные уровни сложности заданий позволили обеспечить достаточно полную проверку вопросов каждого из пяти указанных блоков. Это позволило получить достаточно полную, объективную картину состояния математической подготовки участников ЕГЭ 2003.

В 2002 году экзаменационная работа по математике состояла из 25 заданий, на выполнение которых давалось 3,5 ч (210 минут). В нее было включено 23 задания по алгебре и 2 - по геометрии. Анализ мнения профессионалов и общественного мнения относительно КИМов 2002 г. определил необходимость внесения некоторых коррективов в содержание и структуру Кимов 2003 г. Предлагалось включить в работу текстовые задачи: на «проценты», «на движение», на применение арифметической прогрессии, традиционно предлагаемые на вступительных экзаменах в вузы, а также стереометрическую задачу высокого уровня сложности. В связи с этим число заданий в работе было увеличено на 5. При этом изменилось распределение заданий по блокам содержания (см. таблицу 2.1) и по трем частям работы (16;10; 4). Соответственно было увеличено чистое время на выполнение работы до 4 ч(240 мин).

**Таблица 2.1**

**Распределение заданий по блокам содержания**

| **Блок содержания** | **Число заданий в работе** | |
|---|---|---|
| | **2002 г.** | **2003 г.** |
| **1.** Выражения и преобразования | 6 | 6 |
| **2.** Уравнения и неравенства | 6 | 9 |
| **3.** Функции | 11 | 11 |
| **4.** Числа и вычисления | - | 1 |
| **5.** Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин | 2 | 3 |
| Всего: | 25 | 30 |

Соотношение между числом алгебраических и геометрических заданий и распределение алгебраических заданий по трем первым блокам содержания обусловлено традиционным содержанием выпускного и вступительного экзаменов, а также значимостью проверяемого материала. Малое число заданий по тематике блока 4 объясняется тем, что его материал проверяется опосредованно при выполнении заданий, относящихся к другим блокам. Вопросы содержания и конкретные виды деятельности (знания, умения), проверявшиеся в 2003 году, представлены в Приложении 2.1.

Работа состояла из 3 частей (Часть 1, Часть 2, Часть 3), которые различались по назначению, а также по содержанию, сложности, числу и форме включенных в них заданий.

Часть 1 содержала 16 заданий обязательного уровня (примерно половину всех заданий работы) и была нацелена на проверку усвоения материала только курса алгебры и начал анализа 10-11 классов. Эти задания были типичными для той или иной темы, методы их решения хорошо известны учащимся, а сами решения отрабатывались в процессе обучения. Все задания имели одну и ту же форму – с выбором ответа из 4 предложенных вариантов.

Часть 2 проверяла усвоение отдельных вопросов содержания из различных разделов курса математики 7-11 классов. Она включала 10 заданий (треть всей работы) повышенного уровня, которые значительно различались по сложности. Из них – 8 алгебраических и 2 - геометрических (одно – планиметрическое, другое – стереометрическое). Все задания были составлены в форме задания с кратким ответом.

Часть 3 содержала 4 задания (3 алгебраических и 1 стереометрическое) высокого уровня, различающиеся по сложности, и подобные наиболее сложным заданиям, которые предлагаются на выпускном экзамене в школе и вступительных экзаменах в большинстве вузов. Эти задания давали возможность выделить учащихся, имеющих высокий уровень математической подготовки.

Таким образом, результаты выполнения учащимся заданий Части 1 позволяли зафиксировать наличие уровня базовой математической подготовки по курсу алгебры и начал анализа 10-11 классов, достижение которой принято оценивать отметкой «3». Выполнение заданий Частей 2 и 3 позволило осуществить более тонкую дифференциацию выпускников по уровню математической подготовки и на этой основе выставить им более высокие оценки «4» и «5».

Параллельность вариантов экзаменационной работы обеспечивалась за счет отбора в каждую из ее трех частей заданий определенного в плане работы содержания и уровня сложности (см. приложение 2.1), а также включением взаимозаменяемых, однотипных, примерно одинаковых по сложности заданий, расположенных во всех вариантах на одних и тех же местах.

На выполнение 30 заданий различной сложности было дано ограниченное время – 4 ч (240 мин). Следует отметить, что при решении большинства заданий требуется не только провести необходимые рассуждения, но и выполнить некоторые действия, которые в зависимости от сложности и формы задания занимают различное время от 1-3 минут до 30 минут и более.

В работе использовались три формы заданий: с выбором ответа, с кратким ответом (в виде целого числа) и с развернутым ответом.

<u>Задания с выбором ответа (форма А)</u> Эта форма заданий была использована только в первой части работы. К каждому из них предлагались 4 варианта ответа, из которых только один верный, а остальные составлены с учетом характерных ошибок, допускаемых учащимися. На большинство заданий вряд ли было возможно угадать верный ответ, не проводя некоторых рассуждений или не выполняя некоторых

действий. При этом можно было экономить время, выполняя только те действия, которые необходимы для получения ответа, так как не требуется приводить ни решение, ни обоснование ответа. Полученный ответ надо было сравнить с теми вариантами, которые предложены к данному заданию, и затем отметить в специальном «бланке ответов» номер выбранного ответа.

Задания с кратким ответом (форма В) Эта форма заданий была использована только во второй части работы. При их решении можно было не записывать подробные выкладки или рассуждения, проводить мысленно промежуточные преобразования, так как ни решение, ни обоснование полученного ответа приводить не требуется. Полученный ответ (целое число) надо было записать в соответствующем данному заданию месте «бланка ответов».

Задания с развернутым ответом (форма С) Эта форма была использована только в третьей части работы. При их выполнении требовалось записать полное решение с необходимым обоснованием, как это обычно делается при выполнении письменных работ. Для записи решения были выданы специальные листы, на которых надо было экономно располагать нужные записи.

Всего в работе 4 задания с развернутым ответам. Как уже говорилось, они являются самыми сложными. Их сложность определяется прежде всего тем, что при их выполнении необходимо использовать знания материала, который относится к различным разделам курса математики средней школы. Они были даны с целью проверки умения не только найти ответ на поставленный вопрос, но и обосновать полученные выводы, построить логически грамотную цепочку рассуждений и математически грамотно записать решение. При записи решения требовалось, чтобы сделанные выкладки были последовательны и логичны, переходы к следующему шагу решения обоснованы, выводы подкреплены ссылками на изученные свойства или признаки математических объектов, на изученные формулы, а математические термины и символы использованы корректно. Выполнение заданий проверялось и оценивалось экспертами с учетом критериев оценки, разработанных специально для данного задания.

Оценка выполнения заданий

Задание с выбором ответа (форма А) считалось выполненным верно, если в «бланке ответов» отмечена цифра, которой обозначен верный ответ на данное задание. Задание с кратким ответом (форма В) в виде некоторого целого числа считалось выполненным верно, если в «бланке ответов» записано именно это число. Проверка выполнения заданий, составленных в форме А или В, осуществлялось с помощью компьютера, что обеспечивает объективность их оценки. За верное выполнение каждого такого задания выставлялся 1 балл.

Ответы на задания с развернутым ответам (форма С) проверялись экспертной комиссией. Для этого были разработаны общие критерии оценки их выполнения. Затем на их основе для каждого такого задания разработаны конкретные критерии, учитывающие полноту и правильность данного на них ответа. За выполнение задания можно было получить от 0 до 4 баллов максимально. Общие критерии, а также пример конкретизированных на их основе критериев оценки задания с развернутым ответом представлены в Приложении 2.2.

Ответ ученика оценивались двумя независимыми экспертами. Если их оценки одной и той же работы существенно различались (более, чем на 2 балла), то эту работу проверял третий, как правило, наиболее опытный эксперт. Эта процедура позволила повысить объективность проверки выполнения заданий с развернутым ответом.

## 2.2. Характеристика участников ЕГЭ 2003 года

ЕГЭ по математике в 2003 году сдавали около 625005 выпускников средней школы из 47 регионов России. Количество участников экзамена существенно варьировалось по регионам от 138 до 55531. Это объясняется различным количеством выпускников средних школ в регионах, а также тем, что в ряде регионов в ЕГЭ участвовали все выпускники, в остальных - только часть учащихся, выбравших эту форму сдачи экзамена.

Несмотря на большое число учащихся, участвовавших в ЕГЭ 2003 г., эта выборка не является репрезентативной выборкой выпускников средних школ России. Поэтому полученные результаты нельзя распространить с достаточным основанием на всю совокупность выпускников страны. Тем не менее, в рассмотренных далее результатах экзамена, проведенного в июне 2003 г., явно проявились как положительные качества, так и недочеты математической подготовки этой совокупности учащихся.

## 2.3. Основные результаты экзамена по математике

За верное выполнение каждого из 26 заданий Частей 1 и 2 ученик получал 1 балл, а за каждое из четырех заданий Части 3 – от 0 до 4 баллов в зависимости от полноты и правильности данного им решения. За выполнение всей работы ученик получал сумму первичных баллов, выставленных за решенные им задания. Максимальное значение суммы первичных баллов было равно 42 баллам (1x26 + 4x4= 42).

За выполнение работы ученику выставлялись две отметки: «тестовая» и аттестационная. Первая оценивала подготовку к обучению в вузе, вторая - усвоение материала курса алгебры и начал анализа 10-11 классов.

Тестовая оценка характеризует математическую подготовку выпускника по курсу математики основной и средней школы. Она выставлялась по стобалльной шкале на основе суммы первичных баллов, полученных за все выполненные задания работы. Эта отметка заносится в сертификат, который можно послать в приемные комиссии вузов, участвующих в эксперименте по введению ЕГЭ.

Вторая отметка – аттестационная, характеризующая только усвоение материала курса алгебры и начал анализа 10-11 классов, выставлялась по используемой в школе пятибалльной шкале. При этом учитывались первичные баллы, полученные только за 25 алгебраических заданий, составленных на материале данного курса (16 заданий: А1-А16 из Части 1, 6 заданий: В1-В6 из Части 2, 3 задания: С1,С2,С4 из Части 3), и не принималось во внимание выполнение 2 алгебраических заданий, составленных на материале курса алгебры основной школы, и 3 геометрических заданий. Максимальное значение первичных баллов за выполнение этих 25 заданий было равно 34 (1x26 + 4x3= 34).

На рисунках 2.1 и 2.2 представлены распределения тестовых и аттестационных отметок, полученных выпускниками, сдававшими ЕГЭ в 2003 году.

**Таблица 2.2**

**Распределение тестовых оценок (100-балльная шкала) за выполнение ЕГЭ 2003 г.**

***Число участников в 2002 г. 257009 из 16 регионов, в 2003 г. – 625005 из 47 регионов.***

| Баллы | 0-10 | 11-20 | 21-30 | 31-40 | 41-50 | 51-60 | 61-70 | 71-80 | 81-90 | 91-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Процент выпускников 2002 г | 0,3 | 1,4 | 10,0 | 15,5 | 27,4 | 20,0 | 16,6 | 6,5 | 1,8 | 0,4 |
| Процент выпускников 2003 г | 0,2 | 0,0 | 7,5 | 25,9 | 21,2 | 17,7 | 15,2 | 7,8 | 3,8 | 0,7 |

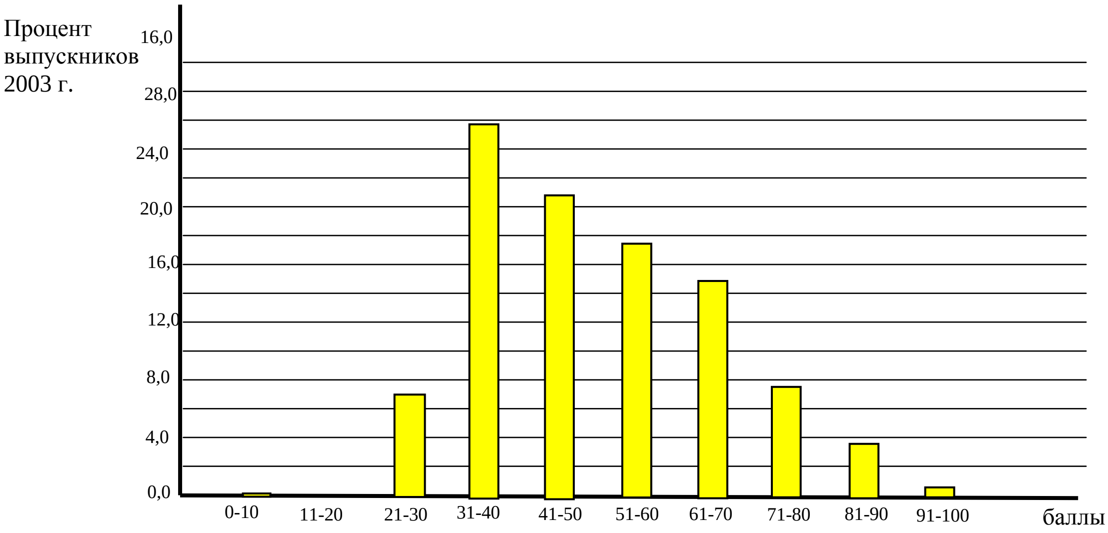



**Рис. 2.1. Распределение тестовых оценок (100-балльная шкала) за выполнение ЕГЭ 2003 г.**

Приведенные на рисунке данные показывают значительные различия в уровне математической подготовки участников ЕГЭ 2003 г. Низкие результаты – не более 30 баллов показали 7,7%. Высокие результаты - более 70 баллов продемонстрировали – 12,3%, из них 91-95 баллов – 0,487%, 96-100 баллов - 0,213%. При этом 44 выпускника получили наивысшую оценку 100 баллов.

**Распределение аттестационных отметок (5-балльная шкала) за усвоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов**

Процент выпускников 2003 г.

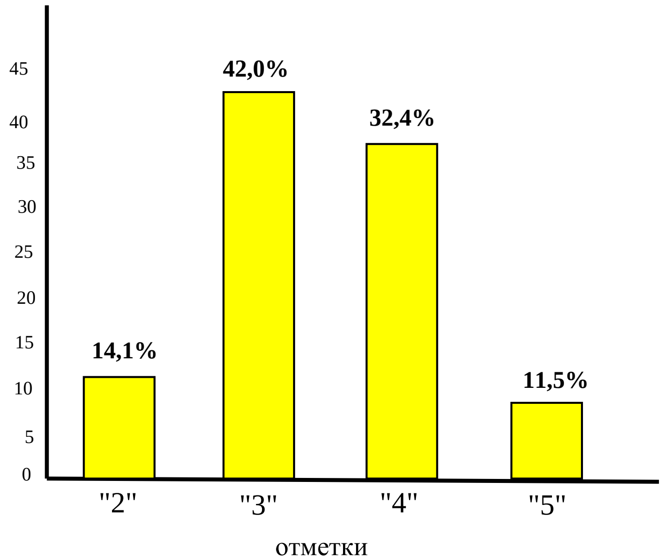



**Рис. 2.2. Распределение аттестационных отметок (5-балльная шкала) за усвоение курса алгебры и начал анализа 10-11 классов**

**2.4. Анализ результатов выполнения экзаменационной работы по математике**

Упорядоченные по величине статистические данные, характеризующие выполнение учащимися экзаменационных работ, позволили дифференцировать участников ЕГЭ по уровню математической подготовки, продемонстрированной ими. На основе этих данных были выделены две группы учащихся, каждая из которых содержала примерно четверть участников ЕГЭ 2003 г. Первая группа состояла из учащихся, показавших более высокие результаты по сравнению с остальными учащимися, а вторая группа – из учащихся, показавших более низкие результаты. В дальнейшем будем называть первую группу "сильной, а вторую – "слабой". Результаты, показанные этими группами учащихся, будут использованы при демонстрации различий в уровне подготовки выпускников школы.

Охарактеризуем более подробно содержание заданий и результаты их выполнения по следующим блокам.

1. Выражения и преобразования.
2. Уравнения и неравенства.
3. Функции.
4. Числа и вычисления.
5. Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин.

## ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Все варианты КИМ содержали задания на тождественные преобразования выражений, содержащих корни, степени (с рациональными показателями), логарифмы, тригонометрические функции.

Задания на преобразования выражений были включены в каждую из трех частей работы.

В заданиях базового уровня Части 1 предлагалось либо упростить выражение, привлекая различные их свойства, либо найти значение выражения, которое обычно требовалось предварительно упростить. Условие задания указывало учащимся на тот вид математической деятельности, владение которым было необходимо продемонстрировать.

В работу были также включены задания повышенного уровня, где требовалось найти значение логарифмического выражения, а также повышенного и высокого уровней на решение уравнений и на исследование функций, выполнение которых также предполагает проведение тождественных преобразований. Однако в таких заданиях учащимся в явном виде не указывалось, какие действия нужно выполнить. Эти задания позволили проверить умения проводить тождественные преобразования выражений в измененной ситуации, когда сами преобразования являлись средством, инструментом для решения более сложного задания.

В Часть 1 были включены базовые задания, широко представленные во всех действующих учебниках по алгебре и началам анализа и традиционно решаемые всеми учащимися. Так, например, ″Упростите выражение $1{,}4a^{\frac{1}{7}} : 2a^{\frac{8}{7}}$″, "Вычислите: $\sqrt[3]{-0{,}3} \cdot \sqrt[3]{-0{,}09}$ ".

Задания повышенного и высокого уровней сложности из Частей 2 и 3 по тем теоретическим фактам, которые требовались для их решения, также не выходили за пределы программы по математике и школьных учебников. Вместе с тем решение отдельных задач предполагало их переформулировку, которая тут же переводила задачу в разряд стандартных. Например, задание из части 2 ″Найдите наибольшее целое значение функции $y = 3{,}5\sqrt{4\cos 2x + 6\sin^2 x + 5}$ ″, переформулированное как

″Упростите выражение, стоящее под знаком корня, и найдите наибольшее целое его значение»″, становится стандартной задачей.

В Части 3 не было заданий, где учащимся явно предлагалось бы выполнить определенные тождественные преобразования, однако были включены задания, решение которых предполагало хорошее владение навыками тождественных преобразований. Например, при выполнении задания: ″Решите уравнение $\sqrt{10+\frac{1}{\log_x 2}} = 2\log_2(0{,}5\sqrt{x})$″ очевидно, требуется предварительное упрощение заданных выражений.

Рассмотрим результаты выполнения заданий, содержащих различные выражения.

<u>**Корень *n*-ой степени**</u>. В явном виде преобразования радикалов встречалось только в заданиях Части 1. Были представлены различные преобразования корней: корень из произведения и произведение корней; корень из степени; корень из частного и частное корней; корень степени n из корня степени m.

Учащимся предлагалось либо упростить выражение, либо найти его значение. Как показывают результаты выполнения, меньшие затруднения вызывают задания вычислительного характера, например, ″Вычислите $\sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[4]{81}$″, в которых числовые данные являются точными значениями корня *n*-ой степени. Несколько хуже справляются учащиеся с заданиями типа: ″Вычислите: $\frac{1}{4}\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt[4]{108}$″, где для вычисления требуется числовые данные разложить на простые множители и записать их в виде произведения степеней.

В этом году лучше справились с заданиями на простейшие преобразования радикалов с буквенными выражениями, например, ″Упростите выражение $\sqrt[5]{\frac{8c^2}{d}}:\sqrt[5]{\frac{d^2}{4c^3}}$″.

В целом, с заданиями, содержащими корни, справились от 50% до 82% учащихся. Самый высокий результат показан в заданиях на упрощение буквенного выражения, например, ″Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a}}$″. Однако даже в этом случае различие результатов, показанных «сильными» и «слабыми» группами учащихся, достаточно велико - его выполнили почти все сильные учащиеся (99%) и только 30% слабых учащихся.

<u>**Степень с рациональным показателем.**</u> Задания на действия со степенями содержались в Части 1 и в Части 3. В Части 1 требовалось либо представить выражение в виде степени с указанным основанием, либо упростить выражение, например, ″Упростите выражение $b^{-\frac{1}{3}}:b^{\frac{2}{3}}$″. В этих заданиях учащиеся должны были показать владение свойством частного степеней с одинаковыми основаниями. Хотя в разных заданиях основания были различными (входили основания буквенные или числовые), показатели степеней были положительными и отрицательными рациональными числами (обыкновенными дробями), но учащиеся показали достаточно стабильные результаты (63%-82%).

Несколько хуже (55%) учащиеся выполнили задание в одном из вариантов, где требовалось упростить выражение $a^{-\frac{16}{9}} : a^{-\frac{4}{3}}$. Как показывает анализ выбранных учащимися ответов, 24% учащихся "забыли" в ответе поставить знак минус в показателе степени, а 13% учащихся не знают, что при делении степеней с одинаковыми основаниями нужно находить разность показателей делимого и делителя.

Заметим, что в этой части с преобразованиями степеней справились от 92% до 99% сильных учащихся и от 23% до 50% слабых.

__Логарифмы.__ Впрямую преобразования логарифмических выражений присутствовали в заданиях Части 1 и Части 2. В неявном виде эти преобразования встречались в заданиях Части 1 (при решении уравнений) и в Части 3 (при решении уравнений и в заданиях исследовательского характера). Были представлены различные преобразования логарифмов: логарифм произведения и сумма логарифмов; логарифм частного и разность логарифмов; логарифм степени и произведения числа и логарифма; основное логарифмическое тождество; формула перехода к логарифму с новым основанием.

Указанный перечень фактов, используемых при решении заданий на преобразование логарифмических выражений, показывает, что этот раздел программы достаточно полно представлен в КИМах. Учащимся предлагалось найти (вычислить) значение логарифмического выражения. Уровень сложности заданий не превосходит уровня, который представлен во всех учебниках по алгебре и началам анализа, рекомендованных МО РФ.

В Части 1 учащимся предлагались задания и с числовыми, и с буквенными исходными данными. С заданиями, в которых даны числовые выражения и нужно впрямую применить известные свойства логарифмов (например, $\log_7 \frac{21}{5} - \log_7 \frac{3}{35} = \log_7\left(\frac{21}{5} : \frac{3}{35}\right) = \log_7 49 = 2$) справляются лучше, чем с теми заданиями, где исходные данные записаны с помощью букв (например, "Вычислите $\log_2 \frac{b}{16}$, если $\log_2 b = 3$").

В целом, с преобразованиями логарифмических выражений базового уровня справляются от 43% до 78% учащихся. Хуже, чем в других вариантах было выполнено задание, условие которого содержало не одно, а два буквенных данных ("Найдите значение выражения $\lg a + \lg b$, если $\lg(0{,}01ab) = 2{,}5$"). Это задание выполнили 33% учеников.

Анализ результатов выполнения различных заданий показывает, что лучше учащиеся выполняют задания, где нужно вычислить значение числового выражения, применив теоремы об арифметических операциях с логарифмами (правильно выполнили 78% учащихся).

В Части 2 также предлагалось задание на нахождение значения логарифмического выражения. Для его выполнения, кроме указанных формул для преобразований логарифмических выражений, требовалось еще и применение формул сокращенного умножения (например, ″Найдите значение выражения $\left(\left(1 - \log_2^2 7\right) \cdot \log_{14} 2 + \log_2 7\right) \cdot 5^{\log_5 24}$ ″). Заметим, что это задание повышенного уровня сложности: чтобы найти значение такого выражения, ученику нужно было выработать ″стратегию″ преобразований, правильный и рациональный план. С этим заданием справились от 17% до 30% учащихся, причем, в группе сильных учащихся это задание выполняют от 60% до 84% учащихся.

**Тригонометрические выражения**. Задания на преобразование тригонометрических выражений входили и в Часть1, и в Часть 2, и в Часть 3 КИМов. Этими заданиями проверялось владение формулами тригонометрии: формулой приведения; формулой синуса разности двух значений аргумента; формулами, выражающими зависимость одной тригонометрической функции от другой.

В Части 1 предлагались базовые задания, где задействованы формулы, выражающие зависимость одной функции от другой. Во всех вариантах работы были задания на преобразование тригонометрического выражения. От учащихся требовалось либо упростить выражение, либо найти значение одной из тригонометрических функций по данному значению другой. Отметим, что более высокие результаты получены при решении заданий, где используется основное тригонометрическое тождество, наиболее часто употребляемая формула. Более низкие результаты показаны в тех заданиях, где нужно по значению тангенса вычислить значение косинуса – используется реже применяемая формула. Результаты их выполнения имеют по вариантам существенный разброс (44% – 80%). Анализируя причины такого положения, заметим, что уровень сложности задания является базовым, подобные задания представлены во всех действующих учебниках по алгебре и началам анализа. В этой связи, возможно, что основной причиной разброса результатов является относительно недавний перенос изучения преобразований тригонометрических выражений в программе по математике из основной школы в старшую. Можно предположить, что неустоявшаяся методика их преподавания в старшей школе и сравнительно небольшое число часов, отводимых на изучение этого материала, привели к различному уровню его усвоения учащимися.

В заданиях повышенной сложности, содержащихся в Частях 2 и 3, ученикам требовалось применить известные формулы тригонометрии для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции или при решении уравнений. Подробнее о выполнении таких заданий укажем в соответствующих разделах.

Охарактеризуем содержание самых сложных заданий по данной тематике, которые были включены в Часть 3. Специальных заданий на выполнение тождественных преобразований выражений в этой части не было. Вместе с тем здесь предлагались задания, в которых встречались тригонометрические, логарифмические, показательные, иррациональные выражения, а также комбинированные выражения, которые по ходу выполнения задания нужно было преобразовать, например, "Решите уравнение $\sqrt{33+\frac{8}{\log_x 4}} = 3\log_4\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)$". В двух задачах присутствовал также параметр, относительно которого и ставился основной вопрос задания, например, "Найдите все положительные, не равные 1, значения $a$, при которых область определения функции $y=\left(a^x\sqrt{a}+a^{3+0,5\log_a x}-x^{0,5+x\log_x a}-a^{3,5}\right)^{0,5}$ не содержит двузначных натуральных чисел. "

Задачи, связанные с преобразованиями числовых, а затем и алгебраических выражений, традиционно входят в начальные разделы большинства пособий для подготовки абитуриентов. Тем самым, невольно подчеркивается их относительная простота, первичность по сравнению со следующими далее уравнениями, неравенствами, системами и т.д. За последнее время положение этих задач в общем объеме экзаменационных материалов существенно изменилось. Хоть сколько-нибудь объемные преобразования даются нынешним выпускникам с заметным трудом. Поэтому, даже простое тождественное преобразование выражения ныне соответствует задаче достаточно высокого уровня сложности.

Охарактеризуем подготовку группы сильных учащихся. Успешно выполняют задания базового уровня на преобразования

- радикалов от 92% до 99%,
- степеней с рациональными показателями от 94% до 99%,
- логарифмов от 90% до 99%,
- тригонометрических выражений от 85% до 99%.

## УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Уравнения, неравенства и их системы содержатся во всех частях контрольно-измерительных материалов. В первой части - самые легкие, базового уровня трудности. Во второй - более сложные, и, наконец, в третьей части - самые сложные, требующие хорошего знания теоретического материала, умения проводить исследование различных ситуаций.

Задания КИМов достаточно полно отражают многообразие видов уравнений и методов их решений, изучаемых в 10-11 классах средней школы. В частности, включены показательные, логарифмические, тригонометрические, иррациональные уравнения и уравнения, содержащие неизвестную в основании и показателе степени.

Экзаменуемым предлагались системы уравнений с двумя неизвестными.

В КИМы включены неравенства только одного вида - логарифмические. Вместе с тем, содержится ряд заданий на исследование функций, при выполнении которых требуется решить степенные и показательные неравенства. Кроме того, в последней, третьей части КИМов приходится решать комбинированные неравенства, содержащие функции разных видов. Таким образом, набор типов неравенств является достаточно представительным.

Рассмотрим результаты выполнения этих заданий.

<u>**Тригонометрические уравнения**</u>**.** Во все варианты КИМов в Часть 1 были включены тригонометрические уравнения, сводящиеся к простейшим $\sin x = a$ или $\cos x = a$, где $|a| \le 1$, или $\mathrm{tg}x = a$.

Приведение уравнения к простейшему занимало один шаг: ученику нужно было применить одну из тригонометрических формул. Проверялись формулы, связывающие тангенс и косинус, (котангенс и синус) одного и того же аргумента или формулы синус (косинус) суммы двух аргументов, например, "Найдите все решения уравнения $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 - tg^2 x = tgx$", "Решите уравнение $\cos x \cdot \cos 2x + \sin x \cdot \sin 2x = \frac{1}{2}$". Таким образом, тригонометрические уравнения, включенные в КИМы, являются базовыми, соответствующими обязательным требованиям к уровню подготовки выпускников средней школы.

С такими уравнениями справляются от 41% до 76% учащихся, причем в группе сильных от 64% до 98%. Анализ выбранных учащимися ответов показывает, что большое число ошибок допущено на завершающем этапе решения при записи общей формулы корней уравнения $\sin x = a$: учащиеся прибавляют период $2\pi n$ вместо $\pi n$. Только при выполнении заданий из трех вариантов работы (например, $\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x = tg^2 x$) показаны более низкие результаты (≈35%). Это, возможно, объясняется тем, что для применения известной формулы, связывающей косинус и тангенс одного и того же аргумента, нужно было к обеим частям уравнения прибавить единицу, то есть выполнить стандартное преобразование уравнения. Очевидно, задание формулы не в явном виде и вызвало снижение процента верно выполнивших задание и среди слабых, и даже среди сильных учеников.

В Части 2 учащимся также было предложено тригонометрическое уравнение. Однако, чтобы свести его к простейшему нужно было выполнить тождественные преобразования, используя две известные тригонометрические формулы; произвести отбор корней простейшего уравнения, исходя из области допустимых значений исходного уравнения; среди найденных корней данного уравнения выбрать те, которые принадлежат заданному в условии промежутку. Хотя те преобразования уравнения, которые требовалось выполнить, были достаточно очевидны, и традиционны, однако, многошаговость (многоэтапность) решения не позволила многим учащимся получить правильный ответ. Справились с заданием от 1% до 19% учащихся, в группе сильных – от 5% до 47%.

В Части 3 учащимся было предложено исследовательское задание, в котором требовалось найти, при каких условиях тригонометрическое уравнение имело бы одно решение (не имело бы решений и т.п.). Включением этого задания ставилась цель, проверить владение комплексом методов решения сложных уравнений, в частности, владение функционально-графическим методом, нестандартными методами решения тригонометрических уравнений (например, использованием ограниченности функции). Как и следовало ожидать, это задание выполнили менее 2% учащихся.

**Логарифмические уравнения.** Логарифмические уравнения включены только в Часть 1. Предлагались уравнения вида $\log_a(x+m) - \log_a(x+n) = \log_a b$ или $\log_c(ax+b)^n = \log_c m$. Подобные уравнения относят к базовому уровню сложности, они широко представлены во всех действующих учебниках. Практически нет различия в результатах выполнения указанных двух видов заданий. Задания выполнили от 41% до 66%, причем в группе сильных учащихся этот процент составляет от 81% до 96%.

Анализ выбранных учащимися ответов показывает, что при решении уравнений допущены ошибки в применении свойств логарифмов, а также в нахождении области определения логарифмического выражения.

Охарактеризуем результаты выполнения уравнения высокого уровня сложности, содержащего логарифмы. Это уравнение расположено на первом месте в Части 3, поэтому из четырех заданий третьей части было самым легким. Предлагались, например, такие уравнения, как $\sqrt{33 + \frac{8}{\log_x 4}} = 3\log_4\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)$, $\log_4(1-24x) \cdot \log_{1-3x} 2 = 1$.

Заметим, что решение подобных уравнений не требует конструирования особого, специального метода решения. Однако, ученик должен прочно владеть известными ему методами решения уравнений, безошибочно выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений, в частности, применяя формулу перехода к новому основанию логарифма; следить за всеми ограничениями в значениях неизвестных величин, входящих под знак корня и логарифма; давать правильные обоснования, а также сделать логически последовательную и математически грамотную запись решения. Таким образом, выполнение этого задания показывает хороший уровень подготовки выпускников и их математическую культуру.

К первому заданию (С1) из Части 3 приступало от 11% до 25% выпускников. Справились с этим заданием от 5% до 17% учащихся.

**Системы уравнений.** Системы уравнений повышенной сложности представлены системой с двумя неизвестными, состоящей из двух уравнений, например: "Пусть $(x_0;\ y_0)$ – решение системы $\begin{cases}\sqrt{x-1}-y=0,\\ y-|x-5|=2.\end{cases}$ Найдите разность $x_0-y_0$." Подобная система предлагалась в ЕГЭ 2002 г. Эта система легко решается графическим методом, но ее можно было бы решить и аналитически. Такие системы представлены в действующих учебниках по алгебре и началам анализа в разделах с задачами повышенной сложности.

С решением системы справились от 42% до 65% учащихся, в группе сильных процент значительно выше: 85%-98%. Если сравнивать эти результаты с показателями прошлого года (30%-45%), то явно можно отметить положительную динамику.

**Неравенства.** В заданиях, где требовалось решить неравенство, были представлены лишь дробно-рациональные неравенства базового уровня сложности, например, "Решите неравенство $\dfrac{x+6}{(2x+3)(x+1)}\le 0$". Кроме того, с необходимостью решать показательное и логарифмическое неравенства учащиеся встречались при выполнении заданий на поиск области определения функции, например, "Найдите область определения функции $y=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-2x}-3}$", "Найдите область определения функции $y=\log_2(x^2-4)$". Таким образом, выпускникам приходилось решать неравенства всех изучаемых типов, так как другие виды неравенств (тригонометрические и иррациональные) не входят в обязательное содержание обучения.

С решением дробно-рационального неравенства указанного вида справились от 34% до 73% учащихся, в группе сильных учащихся этот процент составляет от 71% до 98%. Анализ ответов, выбранных учащимися, показывает, что они забывают исключать из промежутка числа, обращающие в ноль знаменатель дроби, а также делают ошибки в определении знаков на промежутках, если в записи неравенства имеется множитель $b - ax$ (вместо $ax - b$). Это типичные ошибки, над которыми нужно работать при изучении метода интервалов, используемого при выполнении данного задания.

Хуже (28%) решили неравенства вида $2+\dfrac{8}{x}<0$. Это можно объяснить тем, что для применения метода интервалов нужен еще один шаг, чтобы свести данное неравенство к стандартному дробно-рациональному неравенству $\dfrac{2x+8}{x}<0$.

Вызвала затруднение учащихся непривычная формулировка задания на решение дробно-рационального неравенства: требовалось указать число целых неотрицательных решений неравенства $\frac{x-1}{(4x+12)(6-x)} \geq 0$. Справились с заданием 28% выпускников, 23% учащихся при ответе на вопрос не включили в множество решений число 1, обращающее дробь в ноль; а 28% учащихся указали в ответе, что решений бесконечно много, не учитывая, что подсчитали и отрицательные числа. Результаты выполнения этого задания показывают, что имеются еще недоработки не только в освоении метода, но и в освоении терминологии, математического языка.

С заданием, где при выполнении одного из этапов решения требовалось решить показательное неравенство, справились от 50% до 60% учащихся. Подобное задание было включено в ЕГЭ 2002 года. По сравнению с прошлым годом поднялась нижняя граница выполнения с 36% в 2002 г. до 50% в 2003 г.

Охарактеризуем подготовку группы сильных учащихся по теме «Уравнения и неравенства».

Умеют решать простейшие уравнения базового уровня:

| | |
|---|---|
| • тригонометрические | от 64% до 98%, |
| • логарифмические | от 81% до 96%, |

| | |
|---|---|
| Умеют решать дробно-рациональные неравенства базового уровня | от 71% до 98% |

Умеют решать:

| | |
|---|---|
| • тригонометрические уравнения повышенного уровня | от 5% до 47%, |
| • системы уравнений повышенного уровня | от 85% до 98%, |
| • уравнения высокого уровня сложности, содержащие логарифмы | от 5% до 17% |

## ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Во всех вариантах КИМ были представлены задания на проверку функциональных представлений учащихся. Ставились вопросы, касающиеся областей определения и значений функций, промежутков возрастания и убывания, точек максимума (минимума), наибольших и наименьших значений. При ответе на указанные вопросы учащиеся могли исследовать функции элементарными методами или с помощью производной. Эти задания содержались в каждой из трех частей КИМов.

В первой части работы проверялось умение исследовать какое-либо одно свойство функций: найти область определения или множество значений или указать график заданной функции среди нескольких предложенных графиков. При этом задания формулировались таким образом, что в одних случаях для их выполнения учащийся должен был применить аналитический метод решения, а в других – проверялось умение учащегося ″читать″ свойства функций, заданных своими графиками.

Владение аналитическим методом проверялось при нахождении области определения сложной функции, являющейся композицией корня четной степени и показательной функции, а также при нахождении множества значений тригонометрических функций. Например, ″Найдите область определения функции $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} - 3}$″; ″Найдите область значений функции $y = 2\cos x - 1$″.

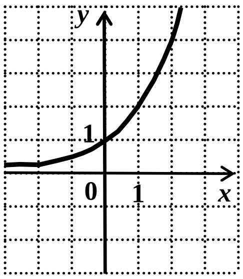
Задания на нахождение области определения сложной функции, где нужно показать умение решать простейшие показательные неравенства ( $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} - 3 \ge 0$ ), выполнили от 50% до 60% учащихся, в группе сильных от 81% до 91%. При этом успешность выполнения такого задания находится в явной зависимости от того, каков характер монотонности показательной функции. Анализ выбранных учащимися ответов показывает, что часто ими не было учтено монотонное убывание функции. Подобное задание входило в вариант 2002 года. Нужно отметить, что в 2002 году область определения показательной функции с основанием меньшим 1 находили около 36% учащихся, в этом году нижняя граница сдвинулась к 50%.

С заданием на нахождение области определения логарифмической функции справились от 40% до 64% учащихся, в группе сильных от 77% до 96%. Выполнение этого задания проверяло знание области определения логарифмической функции и умение решать неполные квадратные уравнения (фактически, материал 9-летней школы, который постоянно повторяется при изучении логарифмов). Отметим, что нижняя граница результатов выполнения такого задания сравнительно низка.

В заданиях на нахождение множества значений функции лучше (от 55% до 82%) решаются те задания, в которых область значений ″считывается″ по графику монотонной функции. Более низкие результаты (от 40% до 68%) получены в тех вариантах, где на рисунке показан график немонотонной на указанном промежутке функции. С такими же результатами выполняются задания, в которых нужно применить аналитический метод. Например: "Найдите множество значений функций $y = -\frac{1}{3}\cos x$", "Найдите область значений функций $y = \sin x - 3$". С этими заданиями справляются от 40% до 67% учащихся.

Во всех вариантах в Части 1 проверялось умение соотнести заданный график с указанными формулами, задающими функцию, или для заданной функции указать ее график, выбрав его из нескольких рисунков. Например, "График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?

1) $y = \log_2 x$
2) $y = 2^x$
3) $y = (0{,}5)^x$
4) $y = \log_{0,5} x$




С заданиями, в которых даны элементарные функции (показательная, логарифмическая или тригонометрическая) справляются от 41% до 74% учащихся, в группе сильных от 77% до 99%.

С теми заданиями, где представлены графики более сложных функций, например $y = \log_2(x-1)$ или $y = \log_2(x+1)$, учащиеся справляются хуже (от 26% до 36%). Очевидно, что это связано с затруднениями в анализе графика, полученного в результате различных преобразований (параллельного переноса вдоль осей Ох или Оу, сжатия и т.п.).

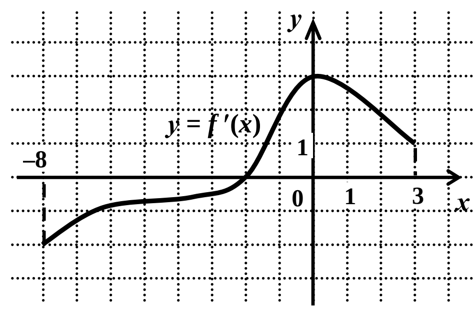
В Части 1 КИМ проверялись умения найти производную и первообразную функции, а также владение геометрическим смыслом производной. Учащимся предлагалось найти производные элементарных функций (степенной, тригонометрических (синуса и косинуса), показательной) с использованием таблицы производных и теорем о производных суммы и произведения. Результаты выполнения заданий показывают, что учащиеся владеют таблицей производных, при этом ими успешнее (от 56% до 83%) выполняются задания, где нужно найти производную суммы двух функций, меньше учащихся сумели найти производную произведения функций (от 50 до 68%). В одном из вариантов КИМов показаны более низкие результаты (46%) при нахождении производной суммы двух функций, что, возможно, объясняется особенностью выборки учащихся. Группа сильных учащихся при нахождении производных показывает стабильно высокие результаты (от 90% до 99%).

Примерно те же результаты (57% до 72%) показывают учащиеся и при нахождении первообразных для заданной функции, применяя для решения таблицы первообразных и правила для их нахождения или определение.

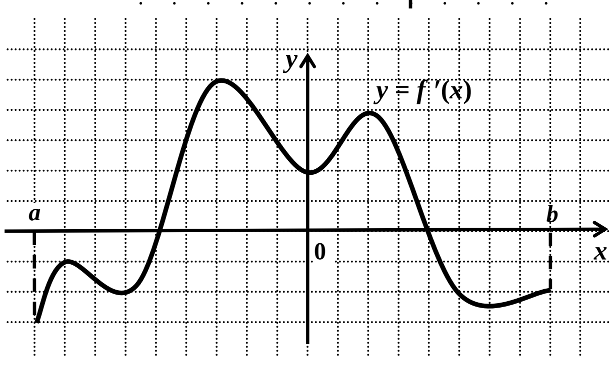
Геометрический смысл производной проверяется в различных вариантах заданиями, в которых для функции, заданной аналитически, нужно было определить угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой $x_0$ С заданием справились от 44% до 64%, в группе сильных от 78% до96%

В Части 2 КИМ были представлены задания повышенной сложности также на исследование свойств функций. Здесь учащимся предлагалось найти число максимумов или минимумов функции, найти число (или длину) промежутков возрастания или убывания функции, найти наибольшее или наименьшее значение функции и др. Для их решения учащиеся должны были применить элементы математического анализа, в частности, достаточные условия возрастания (убывания) функции или достаточные условия точек максимума (минимума). Например,

"На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке [–8; 3]. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите длину промежутка убывания."




"На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на отрезке [ $a$; $b$]. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков возрастания."



Подобные задания интересны тем, что с их помощью проверяется понимание теоретических фактов, в данном случае - достаточных условий возрастания (убывания) функции. Выполнение таких заданий не требует сложных вычислений или преобразований, оно показывает, может ли ученик установить связь между характером монотонности функции и знаком производной. С заданием справились от 16% до 37% учащихся, в группе сильных от 47% до 77%.

В работе предлагались задания на исследование свойств функций (например, ″Найдите наибольшее целое значение функции $y = 3{,}5\sqrt{4\cos 2x + 6\sin^2 x + 5}$ ), которые нужно было решать элементарными методами. Простейшие преобразования тригонометрического выражения, стоящего под знаком корня, значительно упрощали формулу, задающую функцию. Учащимся предлагалось оценить подкоренное выражение (например, $z = 2\cos^2 x + 7$), похожее на то, что было дано в Части 1. Сложность получения окончательного ответа состояла в оценке значения корня и нахождении наименьшего целого значения всего выражения. Задание выполнили от 4% до 23% учащихся.

Во всех вариантах КИМов предлагалось задание на исследование на максимум (минимум) сложной функции (композиции корня нечетной степени и квадратного трехчлена или показательной и тригонометрической функций) элементарными методами. Как и в предыдущем задании, учащимся не требовалось проводить громоздких вычислений или преобразований. При выполнении задания проверялось понимание определения точки максимума (минимума), определения возрастающей (убывающей) функции и знание свойств квадратного трехчлена (или свойств ограниченности синуса и косинуса). Готовый алгоритм решения подобных задач в учебниках не рассматривается, вместе с тем идеи анализа значений одной функции в зависимости от значений другой функции не являются абсолютно новыми и неизвестными учащимся. Похожие задания (с логарифмической функцией) предлагались в ЕГЭ в 2002 году, в публикациях, характеризующих КИМы 2002 года, методы рассуждений иллюстрировались. Несмотря на это с заданием справились от 2% до 23%, в группе сильных от 8% до 57%.

В Часть 3 каждой работы было включено одно задание высокого уровня сложности на нахождение области определения функций. Например, "Найдите все положительные значения $a$, при которых область определения функции $y = \left(\left(\sqrt{a}\right)^{2x+1} + \sqrt{x}a^3 - x^{0,5+x\log_x a} - \left(\sqrt{a}\right)^7\right)^{0,5}$ содержит не более двух целых чисел". Это задание стояло на четвертом по порядку и сложности месте в части 3 КИМ. Его решение предполагало и проведение тождественных преобразований выражения, и выполнение оценки, и проведение ссылок на свойства элементарных функций. Все задания имели одну и ту же общую конструкцию, которая состояла в рассмотрении композиции трех-четырех из основных элементарных функций. На каждом шаге следовало использовать те или иные свойства функций, которые брались из известного списка элементарных функций.

К выполнению этого задания в разных вариантах работы приступало от 4% до 11% учащихся. Количество выпускников, успешно решивших эти задачи, составило от 2% до 4%.

В заключение охарактеризуем уровень подготовки, продемонстрированный группой сильных учащихся.

Умеют отвечать на вопросы, связанные с исследованием функций:

- область определения функции (базовый уровень) (по графику) от 78% до 96%,
- область определения сложной функции (базовый уровень) (аналитически) от 75% до 96%
- множество значений функции (базовый уровень) от 84 до 98%
- соответствие графика и формулы, задающей функцию (базовый уровень) от 57% до 97%.
- число промежутков возрастания (убывания) функции (повышенный уровень) от 47% до 77%,
- минимум (максимум) функции, задача с параметром (повышенный уровень) от 7% до 57%,
- наибольшее (наименьшее) значение функции (повышенный уровень) от 13% до 57%,

Владеют элементами начал математического анализа:

- умеют находить производные функций (базовый уровень) от 81% до 99%,
- владеют геометрическим смыслом производной (базовый уровень) от 78% до 96%,
- умеют находить первообразную функции (базовый уровень) от 93% до 98%,
- умеют применять исследование функции, производную для решения уравнений с параметром (высокий уровень) от 0%до 2%.

## ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

В 2003 году во все варианты КИМов впервые были включены, так называемые, текстовые задачи. При их решении можно было использовать различные математические модели: составление уравнения или системы уравнений (задание В7 в Части 2), понятия или факты, изученные в теме «Арифметическая прогрессия».

В задачах на составление уравнений или систем уравнений были представлены два типа сюжетов: «на проценты» и «на движение»

Сюжеты задач на проценты можно разделить на три группы:

1) задачи, связанные с изменением влажности объекта (продуктов, строительных материалов и т.д.);
2) задачи об изменении плана выпуска продукции, величины зарплаты или стоимости товара, акций;
3) о содержании компонентов в растворе или сплаве.

Например,

1) Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.
2) а) Предприятие уменьшило выпуск продукции на 20%. На сколько процентов необходимо теперь увеличить выпуск продукции, чтобы достигнуть его первоначального уровня.

б) Зарплату повысили на $p\%$. Затем новую зарплату повысили на $2p\%$. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

3) Смешали 160 г раствора, содержащего 60% соли, и 240 г раствора, содержащего 40% соли. Сколько процентов соли в получившемся растворе?

Задачи первой группы - «на влажность» - успешно решили от 2% до 6% учащихся. Исключение составляет одна задача, которую решили 38%. Возможно, что это объясняется тем, что в ней рассматривается широко известный сюжет, связанный с подсушиванием грибов. Такие задачи присутствуют в школьных учебниках и пособиях для поступающих в вузы.

Задачи второй группы успешно решили от 9% до 21% выпускников. Следует отметить, что в демонстрационном варианте КИМов была задача именно такого типа. Возможно, поэтому учащиеся были лучше подготовлены к ее решению.

Задачи третьей группы – «на растворы и сплавы» - для учащихся оказались более легкими: получено 14%-19% верных ответов. Возможно, это связано с тем, что подобные задачи решаются также на уроках химии.

Охарактеризуем второй тип задач – «на движение». Например:

> «Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?».

Решение этих задач легко сводится к получению квадратного уравнения, имеющего два корня, из которых надо отобрать корень, отвечающий условию задачи. С ними справлялись от 21% до 33% учащихся. Таким образом, задачи «на движение» являются для учащихся более простыми, чем «на проценты».

С текстовыми задачами, где в качестве модели используется арифметическая прогрессия, справились от 8% до 29% выпускников, а в группе сильных разброс результатов весьма велик – от 19% до 73%.Заметим, что в отличие от задач первого типа здесь достаточно легко просматривается стратегия (план) решения.

Традиционно невысокий процент выполнения текстовых задач «на проценты» и «на движение», частично, объясняется тем, что этот материал, изученный в основной школе, скорее всего не повторяли те учащиеся, которые не планировали сдачу вступительного экзамена по математике в вуз.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Каждый вариант КИМ содержал в Части 2 одно задание по курсу планиметрии и одно - по курсу стереометрии, Часть 3 содержала одну стереометрическую задачу.

Обе геометрические задачи, включенные во вторые части вариантов - вычислительные задачи повышенного уровня сложности. Для их решения учащиеся должны были знать свойства плоских фигур, пространственных тел и уметь использовать их для вычислений значений геометрических величин. Приводить обоснования к решениям этих задач не требовалось.

Стереометрическая задача, включенная в Часть 3, представляла собой задачу высокого уровня сложности, проверявшую умение не только применять геометрические факты в случае нестандартной конфигурации, представленной в условии задачи, но и записывать решение задачи, приводя и вычисления, и необходимые обоснования.

**Планиметрия**

Планиметрические задачи, включенные в варианты 2003 года, были представлены тремя крупными темами: «Треугольники», «Трапеция», «Окружность, вписанная в треугольник или описанная около треугольника». Внутри каждого тематического блока можно выделить отдельные типы задач, различающиеся ключевыми моментами решения, характерными для задач данного типа, а именно применением тех или иных из указанных ниже геометрических фактов:

**«Треугольники»**

- теорема косинусов;
- признак подобия треугольников и следующая из подобия пропорциональность соответствующих сторон;
- определение синуса, косинуса, тангенса угла прямоугольного треугольника (решение прямоугольных треугольников);

**«Трапеция»**

- определение и свойства трапеции;
- свойства равнобедренной трапеции;
- свойства средней линии трапеции;

**«Вписанная и описанная окружности»**

- свойства вписанных углов;
- свойства отрезков пересекающихся хорд;
- свойства отрезков касательных, проведенных из одной точки;
- положение центра вписанного или описанного треугольников.

Помимо ***знания ключевых фактов***, в ходе решения задач проверялось также умение применять ряд свойств фигур и формул, необходимых для вычисления геометрических величин, указанных в условии задачи. В частности, при решении конкретной задачи нужно было применить ***1-2 факта*** из следующего перечня:

- формулы площади треугольника, выраженной через сторону и высоту или через две стороны и угол между ними;
- теорема Пифагора;
- свойства равнобедренного треугольника;
- свойство медианы прямоугольного треугольника;
- связь между синусом и косинусом угла.

Заметим, что этот перечень в целом соответствует определенным способам решения задач. Вместе с тем отдельно взятую задачу часто можно решить не одним, а разными способами. Поэтому при других способах решения, возможно, будут использованы какие-либо факты, не указанные в этом перечне.

При решении каждой задачи требовалось применить нескольких фактов. Так как выполнение задания характеризовалось только процентом верных ответов, то при отсутствии решения невозможно однозначно определить, какие из этих фактов усвоены лучше, а какие хуже. Тем не менее, все же можно сделать некоторые выводы относительно овладения учащимися отдельными умениями (в основном, теми, которые связаны с применением ключевых фактов). Рассмотрим результаты выполнения заданий указанных выше типов.

**Треугольники.** Задачи на вычисление элементов или площадей треугольников можно разбить на три группы в соответствии с проверяемыми элементами содержания.

Использование приемов решения косоугольных треугольников, а именно, применение теоремы косинусов, являлось ключевым моментом решения ряда задач на треугольники, в которых надо было найти либо одну из сторон, либо площадь треугольника. Применение этой теоремы было осложнено тем, что она использовалась не для прямых вычислений, а для составления уравнения, необходимого для получения ответа, как, например, в задаче: «В треугольнике ABC проведена медиана AM, причем, $\angle MAC = 45°$. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$».

С задачами на решение косоугольных треугольников (кроме одной, о которой речь пойдет ниже) справились в целом 4-10% учащихся, 12-25% в группе сильных и 0-2% в группе слабых учащихся.

Одна задача оказалась для учащихся легче, чем остальные, так как в ней в отличие от других задач был дан треугольник, не разбитый медианой на две части. Это делало более легким выбор способа решения. С этой задачей справились 12% учащихся, писавших соответствующие варианты, из группы сильных – 41%.

В задачах на решение прямоугольных треугольников рассматривались равнобедренные или прямоугольные треугольники, и либо было дано, либо требовалось найти расстояние от данной точки до одной из сторон треугольника. Как, например, в следующей задаче: «Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30°, а взятая внутри треугольника точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии $2\sqrt{3}$ от основания.»

С этой группой задач учащиеся справились примерно так же, как с задачами, рассмотренными выше: в целом 4-8%, в группе сильных 12-26%, в группе слабых 0-1%.

Несколько хуже справились учащиеся с задачами на подобие треугольников. Ключевым моментом решения этих задач являлось распознавание подобных треугольников и составление соответствующей пропорции. В данной группе задач представлено непривычное для учащихся расположение подобных треугольников, что затрудняет и их распознавание, и запись пропорциональности сторон. Приведем текст такой задачи: «Точка H лежит на стороне AO треугольника AOM. Известно, что $AH = 4$, $OH = 12$, $\angle A = 30°$, $\angle AMH = \angle AOM$. Найдите площадь треугольника AHM.»

С этой группой задач справились 2-7% учащихся, 7-19% сильных и 0-3% слабых учащихся.

**Трапеция**. Решение задач данной тематики требовало от учащихся знания не только свойств трапеций, но и свойств площадей подобных треугольников и треугольников, имеющих общую высоту.

Для решения группы задач на вычисление элементов равнобедренной трапеции учащиеся должны были выполнить дополнительное построение (провести высоту) и найти один из элементов треугольника, образованного диагональю, боковой стороной и основанием трапеции, как например, при решении следующей задачи. «Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.»

Заметим, что первый шаг решения данной задачи состоит в применении того факта, что высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины меньшего основания, разбивает большее основание на отрезки, равные полусумме и полуразности оснований. Это специфическое свойство равнобедренной трапеции не является обязательным для усвоения элементом знания. Однако учителя нередко предлагают доказать этот факт при решении несложной задачи. Вместе с тем, без его непосредственного применения решение многих задач становится более громоздким.

С различными задачами данного типа справились от 22% до 28% учащихся, 56-65% в группе сильных и 5% в группе слабых учащихся.

В одной из задач была дана равнобедренная трапеция, описанная около окружности. Для ее рационального решения нужно было, кроме свойств равнобедренной трапеции, использовать специфические свойства описанной трапеции. В частности, то, что сумма ее оснований равна сумме боковых сторон, а для равнобедренной трапеции – что боковая сторона равна средней линии. Явное использование последнего свойства делает решение задачи достаточно простым, в противном случае решение более длинное и опирается на свойства отрезков касательных, проведенных из одной точки. С решением задачи справились10% учащихся, 33% сильных , 1% слабых учащихся.

Хуже всего из задач на трапецию учащиеся справились в тех случаях, когда требовалось использовать подобие треугольников, получающихся при проведении в трапеции двух диагоналей. Например, в следующей задаче. «В трапеции ABCD с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O, причем AO =3OC. Площадь треугольника AOD равна 36. Найдите площадь трапеции».

Применение свойств подобных треугольников является существенным элементом решения данной группы задач, а все решение в целом содержит достаточно много шагов. Однако, результаты выполнения данных заданий оказались выше, чем в задачах на подобие треугольников (см. пункт 3 в таблице 2.3). Очевидно, это объясняется тем, что в данном случае подобные треугольники представлены в типичной конфигурации, что упрощает распознавание подобных треугольников и составление пропорции. С этими задачами справились: в целом 7 – 9%; в группе сильных 20 – 27%; в группе слабых 0%.

Ниже в таблице 2.3 представлены результаты выполнения заданий разных типов, о которых говорилось выше.

**Таблица 2.3**

| Основное содержание заданий | Результаты выполнения (в %) | | |
|---|---|---|---|
| | в целом | в группе сильных | в группе слабых |
| **<u>Треугольники</u>**<br>1. Решение косоугольных треугольников | 4–10 | 12–25 | 0–2 |
| 2. Решение прямоугольных треугольников | 4-8 | 12-26 | 0-1 |
| 3. Подобие треугольников | 2-7 | 7-19 | 0-3 |
| **<u>Трапеция</u>**<br>4. Равнобедренная трапеция | 22-28 | 56-65 | 5 |
| 5. Равнобедренная трапеция, вписанная окружность | 10 | 33 | 1 |
| 6. Площадь трапеции, площадь треугольника | 7-9 | 20-27 | 0 |

С планиметрическими заданиями справились:

| | | |
|---|---|---|
| в целом | от 2% до 28%, | |
| по группе сильных | от 7% до 65% | – различие результатов весьма велико, |
| по группе слабых | от 0% до 5%. | |

Поскольку тематика задач в 2003 г. отличалась от тематики 2002 г., то сопоставить результаты выполнения задач на проверку одинаковых элементов содержания не представляется возможным. В целом же по решению планиметрических задач в 2003 г. получены несколько более высокие результаты (2002 г.: 2-16%), причем в основном это объясняется более высокими результатами, показанными группой сильных учащихся (2002 г.: 5%-41%), тогда как по группе слабых получены такие же результаты, как в прошлом году.

Следует отметить, что у слабых учащихся предлагавшиеся задания вызывают значительные трудности, так как представляют собой нетипичные задачи, для рационального решения которых часто желательно помнить такие факты, которые выводятся в ходе решения задач. В связи с тем, что планиметрия в 10-11 классах не изучается, необходимая для решения этих задач подготовка может быть достигнута только при условии целенаправленной работы по повторению и решению планиметрических задач. Как правило, такую работу осуществляют учащиеся, желающие поступать в вузы, где требуется такая подготовка. Таким образом, планиметрические задачи в вариантах КИМ выполняют свою функцию дифференциации учащихся по уровню подготовки.

**Стереометрия**

В Часть 2 всех вариантов КИМов была включена задача, связанная с темами «Многогранники» (призма, пирамида, правильные многогранники) и «Тела вращения» (прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус). Данные задачи проверяли знание свойств указанных пространственных фигур, умение применять их для вычисления элементов фигур, а также знание формул для вычисления площадей поверхностей и объемов многогранников и тел вращения.

В ходе решения задач проверялись также знания учащихся о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве. Так для решения ряда задач нужно было использовать признаки и свойства:

- параллельности прямой и плоскости,
- перпендикулярности прямой и плоскости,
- параллельности плоскостей,
- перпендикулярности плоскостей,
- теорему о трех перпендикулярах.

Кроме того, проверялись умения распознавать (применяя соответствующие определения и теоремы) и вычислять углы и расстояния в пространстве:

- угол между прямыми,
- угол между прямой и плоскостью,
- угол между плоскостями, двугранный угол и линейный угол двугранного угла,
- расстояние от точки до плоскости,
- расстояние между скрещивающимися прямыми,
- расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью,
- расстояние между параллельными плоскостями.

Рассмотрим результаты выполнения заданий, содержащихся в вариантах КИМов 2003 года. Они были связаны с двумя видами пространственных тел – пирамидой и кубом. Среди них можно выделить группы задач, отличающиеся ключевыми сведениями, которые применялись при их решении.

**Пирамида**. В задачах рассматривались частные виды пирамид, которые можно классифицировать в зависимости от того, какое в пирамиде основание (квадрат, ромб, прямоугольник, прямоугольный или равнобедренный треугольник) и в зависимости от положения высоты пирамиды (совпадает с ребром, основание высоты – центр квадрата, центр описанной около основания или вписанной в него окружности и т.п.). Второй вариант классификации в большей мере связан с применением важных стереометрических понятий и фактов, поэтому при рассмотрении результатов выполнения заданий именно он принят за основу.

Самые большие трудности вызвали у учащихся задачи, где была дана пирамида, боковые грани которой одинаково наклонены к плоскости основания. Для успешного решения задач данной группы нужно было знать, что в этом случае основание высоты пирамиды совпадает с центром вписанной в основание окружности и суметь вычислить радиус этой окружности, как например, при решении следующей задачи. «В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если высота пирамиды равна $4\sqrt{2}$.» С подобными задачами справились 3-6% учащихся, 11-17% в группе сильных и 0-1% в группе слабых учащихся.

Несколько лучше учащиеся справились с задачами, в которых рассматривается пирамида, все ребра которой одинаково наклонены к плоскости основания. В этом случае основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания. Задачи этой группы различались способами вычислений, которые были обусловлены фигурой, которая являлась основанием пирамиды. Самые лучшие результаты получены в том случае, когда основанием служит прямоугольник (в группе сильных - 10%, 31%), несколько хуже – когда в основании лежит произвольный треугольник (в целом -7-9%, а в группе сильных – 23-28%), еще ниже – когда в основании прямоугольный или равнобедренный треугольник (в целом -5-8%, в группе сильных – 13-23%). По всем заданиям данной группы получены результаты: в целом 5-10%, в группе сильных - 13-31%, в группе слабых - 0-1%.

Две задачи, в которых рассматривалась правильная пирамида, были связаны с нестандартными для правильных пирамид вычислениями. Хотя условия и требования задач весьма сильно различались, для решения каждой из них нужно было выразить разные элементы пирамиды через сторону основания (или другой элемент), используя свойства правильной пирамиды. Несколько легче для учащихся оказалась задача на вычисление отношения площади сечения к площади основания, если дано отношение площади боковой грани к площади основания Больше трудностей вызвала задача, в которой нужно было найти объем пирамиды, зная ее высоту и то, что плоские углы при вершине прямые. Соответственно по этим задачам получены следующие результаты: в целом 13 и 6%, в группе сильных 37 и 18%, в группе слабых 0 и 1%.

Наиболее успешно учащиеся справились с группой задач, в которых рассматривалась пирамида, одно ребро которой перпендикулярно основанию. При решении этих задач необходимо было выявить угол, являющийся линейным углом двугранного угла, величина которого была дана в условии задачи. Для этого требовалось не только знать определение двугранного угла и его линейного угла, но и применить теорему о трех перпендикулярах. Кроме того, нужно было уметь вычислять элементы прямоугольных треугольников, приведем для примера задачу, в которой идет речь о пирамиде, основанием которой является треугольник (по этой задаче получены самые высокие результаты): «В пирамиде SABC грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости основания, ребро BC равно 10, а двугранный угол при ребре BC равен 45°. Найдите объем пирамиды, если площадь ее основания равна 30**.»**

Другие задачи данной группы отличались тем, что в них рассматривались пирамиды с различными основаниями (квадрат, ромб, прямоугольный треугольник) и в их решениях были различными отдельные шаги вычислений. С задачами данной группы справились 8-15% учащихся, в группе сильных 25-46%, в группе слабых 0 – 1%.

**<u>Куб и призма</u>**

Для решения всех задач, связанных с кубом, нужно было построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки. Во всех задачах эти сечения имели форму трапеции, одно основание которой являлось диагональю грани куба, а величина другого основания была равна половине такой диагонали. Решения задач данной группы различались вычислениями, зависящими от величин, которые были даны и, которые требовалось найти.

Самой трудной для учащихся (с ней справились 4% учащихся, 12% сильных учащихся) оказалась задача: «Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точки A, $B_1$ и середину ребра $CC_1$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 36.»

Более легкими для учащихся оказались задачи, в которых был дан периметр, а не площадь сечения, и задачи, для решения которых не надо было составлять уравнение для вычисления искомых величин, что представляет для учащихся определенные трудности, а выполнить прямые вычисления. С задачами данной группы справились: в целом 4-12%, в группе сильных 12 – 35% учащихся.

Для решения задачи, связанной с призмой, требовалось построить линейный угол двугранного угла и применить в вычислениях приемы решения прямоугольных треугольников. С данной задачей справились15% учащихся, в группе сильных – 44% учащихся.

Ниже в таблице 2.4 представлены результаты решения стереометрических задач разных типов, о которых говорилось выше.

**Таблица 2.4**

| Основное содержание заданий | Результаты выполнения (в %) | | |
|---|---|---|---|
| | в целом | в группе сильных | в группе слабых |
| **<u>Пирамида</u>**<br>1. Пирамида, в которой боковые грани одинаково наклонены к основанию | 3-6 | 11-17 | 0-1 |
| 2. Пирамида, в которой все ребра одинаково наклонены к основанию | 5-10 | 13-31 | 0-1 |
| 3. Правильная пирамида | 6; 13 | 18; 37 | 1; 0 |
| 4. Пирамида, одно ребро которой перпендикулярно основанию, двугранный угол | 8 – 15 | 25 – 46 | 0-1 |
| **<u>Куб и призма</u>**<br>5. Сечение в кубе | 4 – 12 | 12 – 35 | 0 |
| 6. Призма, двугранный угол | 15 | 44 | 0 |

В целом с решением различных стереометрических задач Части 2 справились от 3 до 15% учащихся, в группе сильных учащихся – от 11 до 44%. Это несколько более ровные результаты, чем в 2002 г. (2-31%, в группе сильных 7-74%)

В 2003 г. учащиеся с большинством задач по планиметрии из Части 2 справились более успешно, чем со стереометрическими задачами из этой же части работы.

В заключение отметим, что выпускники школы в целом продемонстрировали невысокий уровень подготовки, как по курсу планиметрии, так и по курсу стереометрии.

В 2003 году в варианты ЕГЭ впервые в Часть 3 была включена стереометрическая задача высокого уровня сложности.

Все эти задания являлись задачами на вычисление некоторой величины, связанной с достаточно сложной геометрической конфигурацией. Именно геометрической конфигурацией, и определялась сложность этой задачи, сопоставимой с геометрическими задачами, предлагающимися на вступительных экзаменах в ВУЗы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Задачи, вошедшие в варианты основного экзамена, были построены на нескольких различных геометрических конфигурациях, являющихся комбинацией многогранника и тела вращения. Вот эти комбинации:

1) правильная треугольная призма и вписанный в неё цилиндр;
2) правильная четырёхугольная призма и вписанный в неё цилиндр;
3) правильная шестиугольная призма и вписанный в неё цилиндр;
4) правильная треугольная призма и описанный около неё цилиндр;
5) правильная четырёхугольная призма и описанный около неё цилиндр;
6) правильная шестиугольная призма и описанный около неё цилиндр;
7) правильная треугольная пирамида и конус, определенным образом расположенный внутри неё (здесь можно выделить два способа расположения конуса);
8) четырёхугольная пирамида, основание которой – ромб, и конус, определенным образом расположенный внутри неё.

Для решения этих задач требовалось хорошее владение основными теоретическими фактами школьного курса стереометрии, а также практическими навыками вычисления площадей поверхностей и объёмов призм, пирамид, цилиндров и конусов.

При решении первых шести из указанных выше типов заданий требовалось применить важное понятие расстояния между скрещивающимися прямыми. В решении других двух типов заданий использовались свойства подобных фигур, что является одним из важных приемов решения стереометрических задач.

Для успешного выполнения заданий С3 требовалось провести теоретическое обоснование ключевых шагов решения и произвести вычисления, приводящие к числовому ответу. Отметим, что вычисления были достаточно простыми, а теоретические обоснования – достаточно сложными. Это было сделано намеренно. Мы считаем, что именно умение ученика анализировать геометрическую конфигурацию характеризует его уровень владения им стереометрическим материалом.

Как и ожидалось, из слабых учащихся почти никто не справился с решением этих задач. По данным задачам получили не менее 1 балла от 2% до 9% учащихся. В соответствии с критериями оценивания решений эти учащиеся понимают идею решения и применяют верный способ вычислений. При этом успешно справились с решением задачи (получили 3 или 4 балла) 0-4%, из них получили максимальную оценку (4 балла) только 0-2% учащихся.

Отметим, что несколько лучше были выполнены задания, связанные с правильной треугольной призмой и цилиндром, а также с правильной треугольной пирамидой и конусом, ось которого лежит на высоте пирамиды. Приведем формулировки этих заданий.

1. Около правильной треугольной призмы, объём которой равен 288, описан цилиндр. Расстояние от оси цилиндра до диагонали боковой грани призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
2. В правильную треугольную призму, объём которой равен 27, вписан цилиндр. Расстояние от оси цилиндра до диагонали боковой грани призмы равно $3\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
3. Внутри правильной треугольной пирамиды *CABD* с вершиной в точке *C* расположен конус так, что его вершина является центром основания *ABD*, а окружность основания конуса вписана в сечение тетраэдра плоскостью, параллельной плоскости *ABD* и делящей боковое ребро *AC* в отношении 2:1, считая от вершины *C*. Определите отношение объёма тетраэдра к объёму этого конуса.

Более сложными оказались задания, где геометрическая конфигурация состояла из цилиндра и описанной около него прямой призмы, в основании которой был ромб или прямоугольник, а также задачи, где основание конуса вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной скрещивающимся ребрам правильной треугольной пирамиды. Приведем формулировки и этих заданий.

4. В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом 600, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $5\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если объём призмы равен 100.
5. Около прямой четырёхугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольник, диагонали которого образуют угол 600, описан цилиндр. Известно, что объём призмы равен 100, а расстояние от диагонали нижнего основания призмы до скрещивающейся с ней образующей цилиндра, являющейся боковым ребром призмы, равно 5. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
6. Внутри правильного тетраэдра ABCD расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Известно, что площадь полной поверхности конуса равна $25\pi\left(1+\sqrt{3}\right)$. Найдите длину ребра тетраэдра.

Отметим, что большинство учащихся либо не приступало к выполнению задания С3, либо не смогли его выполнить. Очевидно, что многие неверно определили взаимное расположение многогранника и заданного тела вращения, что привело к неверному решению. Некоторые учащиеся явно не усвоили понятия цилиндра, вписанного в призму и описанного около нее.

Анализ имевшихся в нашем распоряжении работ учащихся показывает, что подавляющее большинство из них не привели теоретические обоснования своего решения. По нашему мнению, это объясняется несколькими причинами: недостаточно освоен теоретический материал; учащиеся не считают необходимым обосновывать решение вычислительной задачи; не хватило бумаги для подробных записей решений заданий с развернутым ответом.

Полные исчерпывающие обоснования, требуют от учащегося свободного владения набором определений, аксиом и теорем, а также утверждений, доказанных при решении задач на доказательство. Весь этот арсенал теоретических сведений, по существу, не отрабатывается в общеобразовательной школе по программе, рассчитанной на два учебных часа в неделю. Содержащиеся в школьных учебниках и учебных пособиях задачи на вычисление геометрических величин, подобраны таким образом, что при их решении не требуется проводить доказательства, содержащие несколько шагов, а многоходовые задачи на доказательство не содержат вычислений.

Различие оценок, выставленных экспертами за одни и те же работы, и беседы с самими экспертами показали, что подходы экспертов к оценке решений геометрических задач иногда существенно различаются. Очевидно, чтобы обеспечить более объективную оценку работ учащихся, необходима совместная работа предметной комиссии по математике и региональных экспертных комиссий по проверке работ учащихся.

### 2.5. Выводы и рекомендации

1. В 2003 году ЕГЭ по математике сдавали 625005 выпускников средней школы из 47 регионов России. Отметим, что в ряде регионов в ЕГЭ участвовали все выпускники, в остальных - только часть учащихся, выбравших эту форму сдачи экзамена. Поэтому, несмотря на большое число учащихся, эту выборку нельзя считать представительной для всей совокупности выпускников страны. Особенности данной выборки не позволяют с достаточным основанием распространять количественные результаты экзамена на всю совокупность. Тем не менее, итоги экзамена позволили выделить некоторые тенденции, характерные для состояния математической подготовки выпускников российских школ.

Результаты ЕГЭ 2003 года, как и в 2001 и 2002 г.г., показали значительные различия в уровне математической подготовки, продемонстрированной участниками экзамена. Существенно различаются и уровни усвоения различных знаний и умений, проверявшихся контрольными заданиями. Характеристика состояния конкретных знаний и умений дается в соответствующих разделах отчета.

С большинством базовых заданий по курсу алгебры и начал анализа, включенных в различные варианты работы, справились в целом от 40% до 80% выпускников. При этом результаты выполнения этих заданий группой более подготовленных учащихся (составляют примерно четверть участников экзамена) находятся в интервале 70% - 99%, а результаты группы слабых учащихся (тоже составляют примерно четверть участников)- в интервале 13% - 40%.

С большинством алгебраических заданий повышенного уровня в зависимости от их сложности в целом справились от 7% до 37% выпускников. При этом результаты группы сильных учащихся принадлежат интервалу 16% - 73%. С большинством геометрических заданий повышенного уровня справились в целом 2-28% выпускников, а в группе сильных – результаты в основном находятся в интервале от 12% до 65%.

Большинство алгебраических заданий самого высокого уровня, включенных в третью часть работы, успешно выполнили: 5-15% (первое задание), 0,5 – 1,7% (второе задание), 0,2-1,15% (четвертое задание), а стереометрическое задание высокого уровня (третье задание) - 1-4%.

Выполнение экзаменационной работы в целом характеризует распределение тестовых баллов, выставленных участникам экзамена по 100-балльной шкале. Приведем результаты экзаменов 2002 и 2003 гг.

| Баллы | 2002 г. | 2003 г. |
|---|---|---|
| **0 – 30** | 11,7 % | 7,7 % |
| **31 – 50** | 42,9 % | 47,1 % |
| **51 – 70** | 36,7 % | 32,9 % |
| **71 - 100** | 8,7 % | 12,3 % |

Самые высокие результаты в 2003 г. показали: 81-90 баллов – 3,8 % (2002 г -1,3%); 91-100 баллов – 0,7 % (2002 г. - 0,4%), из них ровно 100 баллов получили 44 выпускника.

По сравнению с результатами ЕГЭ 2001 и 2002 г.г. следует отметить достаточно высокий уровень овладения контролируемым алгебраическим содержанием на базовом уровне группой сильных учащихся. Вместе с тем, группа слабых учащихся по-прежнему показывает стабильно низкие результаты. Результаты выполнения заданий повышенного уровня, значительно различающихся по сложности, существенно не изменились, хотя в овладении геометрическим материалом наблюдается некоторая положительная динамика.

Результаты ЕГЭ 2003 года на российском и региональном уровнях требуют дальнейшего изучения и осмысления. Предварительный анализ позволяет высказать только некоторые общие рекомендации, направленные на совершенствование процесса преподавания и подготовку учащихся средней школы к сдаче единого экзамена.

Повышению уровня математической подготовки выпускников средней школы будут способствовать:

- корректировка стандарта математического образования с учетом значимости каждого включаемого элемента содержания и опорой на эту значимость при определении требований к подготовке выпускников основной и средней школы;
- эффективная реализация уровневой дифференциации в процессе преподавания, которая требует усиления внимания к формированию базовых умений у слабых учащихся или у тех, кто не ориентирован на более глубокое изучение математики, а также обеспечения продвижения учащихся, имеющих возможности и желание усваивать математику на более высоком уровне;
- большее внимание содержательному раскрытию математических понятий, объяснению сущности математических методов и границ их приложений, показу возможностей применения теоретических фактов для решения различных классов математических задач;
- совершенствование методики изучения раздела «Тригонометрия», так как выпускники стабильно показывают низкие результаты в применении элементов содержания данного раздела (например, при выполнении тождественных преобразований, решении уравнений, исследовании функции);
- существенное изменение отношения к преподаванию геометрии в средней школе, где не предусматривается обязательный выпускной экзамен по курсам основной и средней школы, усвоение которых контролируется в рамках ЕГЭ.

Трехлетний опыт проведения ЕГЭ убедительно свидетельствует о необходимости предварительной подготовки учащихся к особой форме контроля, которая отличает этот экзамен от традиционных вступительных и выпускных экзаменов. В этой связи представляется целесообразным в процессе преподавания наряду с традиционными методами и формами проверки знаний учащихся органично включать тестовые формы контроля, используя проверочные работы, сравнимые с КИМами по различной тематике заданий, по числу заданий и включающие различные по форме задания (с выбором ответа, с кратким ответом, с развернутым ответом). Кроме того, для подготовки к ЕГЭ 2004 г. необходимо своевременно издать и разослать по регионам, подготовленные разработчиками КИМов единого экзамена, а также другими авторами сборники тренировочных упражнений, прошедшие экспертизу МО РФ.

2. Изучение опыта проведения ЕГЭ 2003 года позволяет высказать некоторые рекомендации по совершенствованию инструментария ЕГЭ 2004 г. (самих КИМов и системы и процедуры оценивания их выполнения). Предлагается внести следующие изменения в структуру, содержание и процедуру оценки выполнения КИМов и проведение ЕГЭ.

- Усовершенствовать структуру КИМов 2004 г. Задания базового уровня, проверяющие усвоение различных вопросов содержания, значительно различаются по сложности, которая определяется, например, числом операций в алгоритме решения или видом заданной деятельности. При этом очевидно, что некоторые задания не вызывают затруднений и дают лучшие результаты усвоения, другие – усваиваются не всеми. В этой связи в КИМах ЕГЭ 2004 года предполагается более четко структурировать задания Части 1 по уровню сложности, используя для этого статистические результаты выполнения заданий, показанные выпускниками в 2001-2003 гг.
- Усовершенствовать отбор заданий с развернутым ответом по содержанию и уровню сложности, учитывая статистические результаты, полученные при проведении ЕГЭ в 2001-2003 гг.
- Уточнить инструкцию для учащихся, которая располагается перед текстом экзаменационной работы. В ней четко указать, выполнение каких заданий учитывается при выставлении аттестационной отметки и тестового балла.
- Членам предметной группы принять участие в разработке системы шкалирования результатов выполнения КИМов, показанных участниками экзамена.
- Увеличить до 2 число листов бумаги, которые выдаются выпускникам для выполнения заданий с развернутым ответом

**Приложение 2.1**

## ОБЩИЙ ПЛАН КИМ ПО МАТЕМАТИКЕ 2003 г.

| Номер задания | Тип | Контролируемая деятельность | Уровень подготовки |
|---|---|---|---|
| A1 | В | Умение выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений | Б |
| A2 | В | Умение выполнять тождественные преобразования степенных выражений и находить значения выражений | Б |
| A3 | В | Умение выполнять тождественные преобразования иррациональных выражений | Б |
| A4 | В | Умение выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений и находить их значение | Б |
| A5 | В | Умение решать тригонометрические уравнения (общая формула решения уравнений sinx=a, cosx=a, tgx=a) | Б |
| A6 | В | Умение решать логарифмические уравнения | Б |
| A7 | В | Умение решать показательные неравенства | Б |
| A8 | В | Умение решать дробно-рациональные неравенства | Б |
| A9 | В | Умение решать иррациональные уравнения | Б |
| A10 | В | Умение читать графики и иллюстрировать с помощью графиков основные свойства функций | Б |
| A11 | В | Умение находить область определения логарифмической или показательной функции | Б |
| A12 | В | Умение находить множество значений тригонометрической, логарифмической или показательной функции | Б |
| A13 | В | Умение соотносить формулу заданной функции с ее графиком | Б |
| A14 | В | Умение находить производную функции | Б |
| A15 | В | Умение находить первообразную суммы функций и произведения функции на число | Б |
| A16 | В | Понимать и использовать геометрический и физический смысл производной | Б |
| B1 | К | Умение решать системы, содержащие одно или два иррациональных уравнений. | П |
| B2 | К | Умение применять график производной для исследования функции | П |
| B3 | К | Умение выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений. | П |
| B4 | К | Умение находить множество значений сложной функции | П |
| B5 | К | Умение решать тригонометрические уравнения (с отбором корней) | П |
| B6 | К | Умение находить максимум (минимум) сложной функции (с параметром) | П |
| B7 | К | Умение решать текстовые задачи | П |
| B8 | К | Умение решать задачи на арифметическую ***и геометрическую прогрессии*** | П |
| B 9 | К | Умение решать стереометрические задачи на вычисление геометрических величин | П |
| B10 | К | Умение решать планиметрические задачи на вычисление геометрических величин | П |
| | | | |
| C1 | Р | Умение решать комбинированные уравнения. Умение использовать несколько приемов при решении различных уравнений | В |
| C2 | Р | Умение решать уравнения при помощи построения графиков функций | В |
| C3 | Р | Умение решать стереометрические задачи на вычисление геометрических величин в комбинациях многогранников и/или тел вращения | В |
| C4 | Р | Умение находить область определения сложной функции (с параметром) | В |

*Условные обозначения*

| *Тип задания* | *Уровень подготовки* |
|---|---|
| *ВО – задание с выбором ответа* | *Б– базовый* |
| *К – задание с кратким ответом (число)* | *П – повышенный* |
| *Р – задание с развернутым ответом* | *В – высокий* |

**Приложение 2.2**

## ОБЩИЕ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ И ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Решения заданий С1 - С4 Части 3 (с развернутым ответом) оценивается экспертной комиссией. На основе критериев, представленных в приведенной ниже таблице, за выполнение каждого задания в зависимости от полноты и правильности данного учащимся ответа выставляется от 0 до 4 баллов.

| **Оценка в баллах** | **Общие критерии** |
|---|---|
| 4 | Приведена верная последовательность всех шагов решения.<br>Имеются верные обоснования всех моментов решения.[2]<br>Необходимые для решения чертежи, рисунки, схемы выполнены безошибочно.<br>Правильно выполнены все преобразования и вычисления, получен верный ответ. |
| 3 | Приведена верная последовательность всех шагов решения.<br>Имеются верные обоснования всех ключевых моментов решения[3].<br>Необходимые для решения чертежи, рисунки, схемы выполнены безошибочно.<br>Допустимы 1 описка и/или негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате описки или ошибки возможен неверный ответ. |
| 2 | Приведена в целом верная, но, возможна, неполная последовательность шагов решения и/или обоснована только часть ключевых моментов решения.[4]<br>При этом допустимы негрубые ошибки в чертежах, рисунках, схемах, приведенных в решении, одна-две негрубые ошибки или описки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок возможен неверный ответ. |
| 1 | Общая идея, способ решения верные, но не выполнены некоторые промежуточные этапы решения или решение не завершено; большинство ключевых моментов не обосновано или имеются неверные обоснования.[5]<br>При этом допустимы негрубые ошибки в чертежах, рисунках, схемах, приведенных в решении, негрубые ошибки в вычислениях или преобразованиях.<br>В результате этих ошибок может быть получен неверный ответ. |
| 0 | Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла. |

Отметим, что утверждения типа «3 балла ставится, если задача решена на 75%, 2 балла ставится за наполовину решенную задачу,…» являются ошибочными. Решение, оцениваемое 3 баллами, существенно ближе к идеальному, четырехбалльному решению: оно отличается от него лишь наличием неточностей. В свою очередь, оценка «2 балла» ближе к оценке «3 балла», нежели к оценке «1 балл».

[2] В критериях, разработанных для конкретного задания, перечисляются эти моменты решения
[3] В критериях, разработанных для конкретного задания, перечисляются все ключевые моменты решения.
[4] В критериях, разработанных для конкретного задания, перечисляются эти ключевые моменты решения.
[5] В критериях, разработанных для конкретного задания, указаны те действия, выполнение которых необходимо, чтобы судить о том, что ученик продемонстрировал идею правильного решения.