

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Центр оценки качества образования



Международное исследование качества математического  
и естественнонаучного образования

# Математика (профильный уровень)

Тетрадь



Республика/ край/ область \_\_\_\_\_

Район \_\_\_\_\_

Город/ село \_\_\_\_\_

Школа \_\_\_\_\_ класс \_\_\_\_\_

Фамилия, имя \_\_\_\_\_



**TIMSS & PIRLS**

International Study Center

Lynch School of Education, Boston College

По материалам исследования TIMSS 2008



# Инструкция

Вам дается 90 минут для ответа на задания, которые содержатся в этой тетради. Важно, чтобы вы приступили к каждому вопросу и постарались ответить на него как можно лучше.

Можно использовать калькулятор и математические формулы, которые приведены после инструкции. Однако нельзя использовать никакие устройства, позволяющие получить доступ в Интернет.

В некоторых заданиях от вас потребуется **выбрать верный ответ** из предложенных вариантов и отметить кружок около того ответа, который вы считаете верным, как это сделано в примере 1.

## Пример 1

Пример 1

Какова формула площади круга?

- (A)  $S = 2\pi r$
- ☒ (B)  $S = \pi r^2$
- (C)  $S = 4\pi r^2$
- (D)  $S = \frac{4}{3}\pi r^3$

Если вы не уверены в том, как ответить на вопрос, то выберите из предложенных вариантов тот ответ, который, как вы думаете, скорее всего, является верным.

Если вы хотите изменить данный вами ответ, то зачеркните «X» ваш первоначальный ответ и отметьте кружок около ответа, который вы считаете верным, как это сделано в примере 2.

## Пример 2

Пример 2

Какова формула площади круга?

- ☒ (A)  $S = 2\pi r$
- ☒ (B)  $S = \pi r^2$
- (C)  $S = 4\pi r^2$
- (D)  $S = \frac{4}{3}\pi r^3$

## Инструкция (продолжение)

В других заданиях от вас потребуется **записать ответ в тетради на отведенном для него месте**. В некоторых из этих заданий вас попросят показать проделанную вами работу. К этим заданиям вы должны записать **полное объяснение** или **все шаги решения**, которые вы сделали для получения ответа.

### Пример 3

Найдите координаты точек пересечения графиков функций  $f(x) = x + 2$  и  $g(x) = x^2$ .

Приведите свое решение.

$$x^2 = x + 2$$

$$y = x + 2$$

$$y = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$y = 2 + 2$$

$$y = -1 + 2$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$y = 4$$

$$y = 1$$

$$x = 2 \text{ или } x = -1$$

$$(2; 4)$$

$$(-1; 1)$$

Если при выполнении подобного задания вы использовали калькулятор, вы все равно должны описать шаги, проделанные для получения ответа. Приведенная ниже запись иллюстрирует возможный вариант объяснения при использовании калькулятора в Примере 3.

Построены графики  $f(x) = x + 2$  и  $g(x) = x^2$  на калькуляторе.

Точки пересечения:  $x = 2$  и  $x = -1$

$$f(2) = 4$$

$$f(-1) = 1$$

$$(2; 4) \text{ и } (-1; 1)$$

Когда вы закончите выполнение всех заданий, которые содержатся в этой тетради, пожалуйста, ответьте на вопросы краткой анкеты **относительно использования калькулятора**, которая помещена в конце тетради.

# Некоторые математические формулы

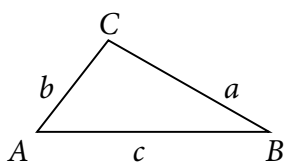
## Комплексные числа

$$i^2 = -1$$

Если  $z = x + iy = r(\cos A + i \sin A)$ ,  
где  $x$  и  $y$  действительные числа, то

$$z^n = [r(\cos A + i \sin A)]^n = r^n (\cos nA + i \sin nA)$$

## Тригонометрия



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Логарифмы

Если  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  и  $b \neq 1$  и  $c \neq 1$ , то

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

## Арифметическая прогрессия

Если  $a_n$  –  $n$ -й член арифметической прогрессии с первым членом  $a_1$  и разностью  $d$ , то:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Если  $S_n$  – сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии, то:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

## Геометрическая прогрессия

Если  $b_n$  –  $n$ -й член геометрической прогрессии с первым членом  $b_1$  и знаменателем  $q$ , то  $b_n = b_1 q^{n-1}$

Если  $S_n$  – сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии, то

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ если } q \neq 1$$

Если  $S$  – сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом  $b_1$  и знаменателем  $q$ , где  $|q| < 1$ , то:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

(продолжение на следующей странице)

## Некоторые математические формулы (продолжение)

### Формула корней квадратного уравнения      Математический анализ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

### Длина, площадь и объем

Если  $d$  – расстояние между точками  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ , то

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Если  $f(x) = g(h(x))$ , то  $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$S_{\text{бок}} = 2\pi rh$  – площадь боковой  
поверхности цилиндра

$S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$  – площадь боковой  
поверхности конуса

$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$  – площадь поверхности  
сферы

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$



**Не переворачивайте эту страницу и не начинайте выполнять задания, пока вам не скажут об этом.**

1

Функции  $f$  и  $g$  заданы формулами  $f(x) = x - 1$  и  $g(x) = (x + 3)^2$ .

Найдите  $g(f(x))$

- Ⓐ  $(x - 1)(x + 3)^2$
- Ⓑ  $(x + 3)^2 - 1$
- Ⓒ  $(2x - 2)^2$
- Ⓓ  $(x + 2)^2$
- Ⓔ  $x^2 + 8$

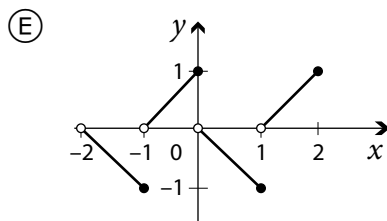
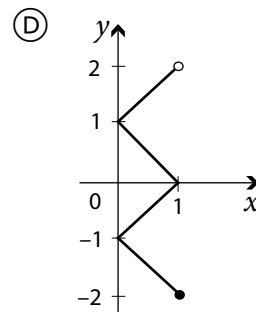
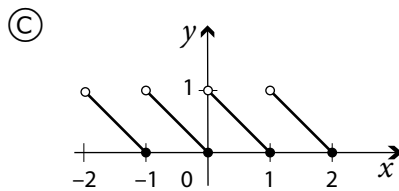
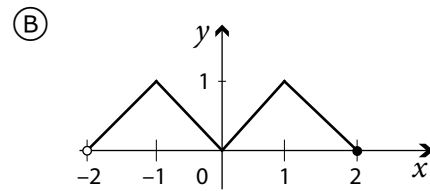
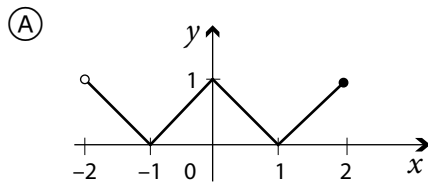
MA13001

2

Функция  $f$  определена следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{при } -2 < x \leq -1 \\ x+1 & \text{при } -1 < x \leq 0 \\ -x+1 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ x-1 & \text{при } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

На каком из рисунков изображен график этой функции?



MA13002

3

Для прогнозирования прибыли  $y$  (в долларах) от продажи  $x$  тысяч единиц некоторого товара ( $0 < x < 5$ ) предложены две математические модели, основанные на разных методах маркетинга.

$$\text{Модель P: } y = 6x - x^2$$

$$\text{Модель Q: } y = 2x$$

Для каких значений  $x$  в модели Q прогнозируется бóльшая прибыль, чем в модели P?

- Ⓐ  $0 < x < 4$
- Ⓑ  $0 < x < 5$
- Ⓒ  $3 < x < 5$
- Ⓓ  $3 < x < 4$
- Ⓔ  $4 < x < 5$

MA13003

4

Вычислите  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)(x+1)}{3x^2-2}$ .

- Ⓐ  $-\frac{1}{2}$
- Ⓑ  $\frac{2}{3}$
- Ⓒ 1
- Ⓓ 6
- Ⓔ  $\infty$

MA13004

**5**

Вычислите интеграл  $\int_1^2 \left( x - \frac{1}{x^2} \right) dx$ .

Ⓐ  $-3\frac{1}{8}$

Ⓑ 1

Ⓒ  $2\frac{5}{8}$

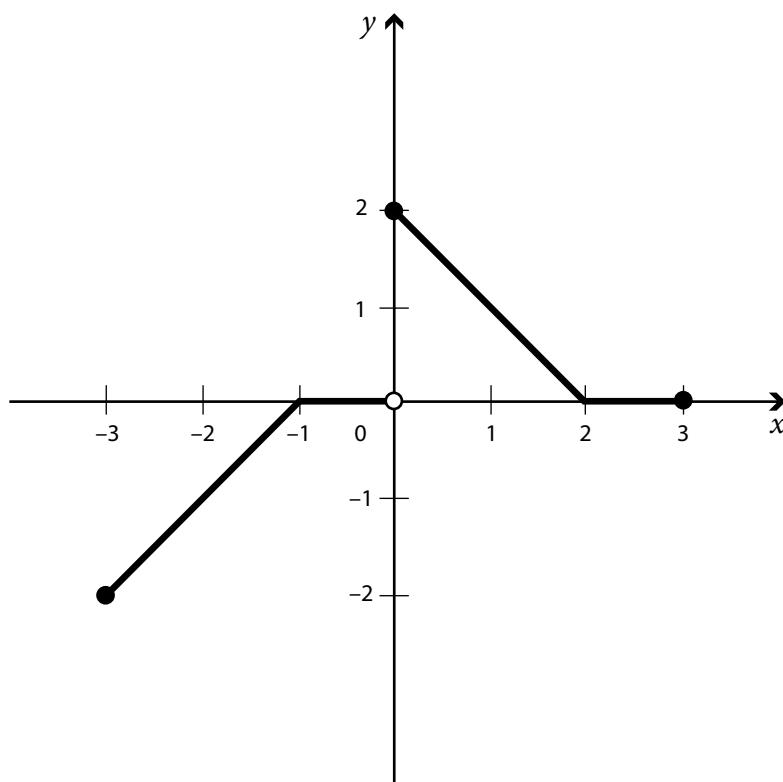
Ⓓ 4

Ⓔ  $4\frac{1}{2}$

MA13024

6

Функция  $y = f(x)$  задана на отрезке  $[-3; 3]$  следующим графиком:

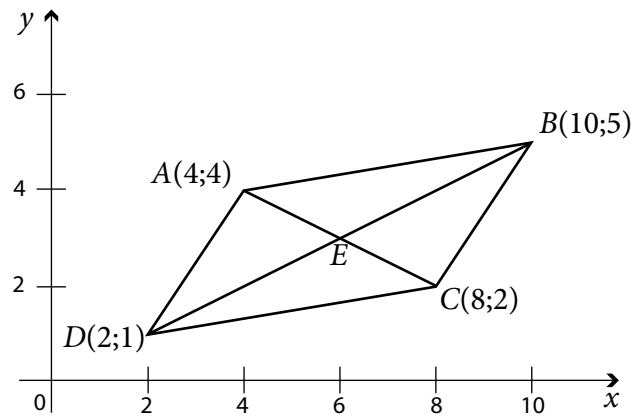


А. Для каких значений  $x$  в интервале  $(-3; 3)$  функция  $f(x)$  НЕ является непрерывной?

В. Для каких значений  $x$  в интервале  $(-3; 3)$  функция  $f(x)$  НЕ дифференцируема?

**7**

В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$ . ДОКАЖИТЕ, что точка  $E$  является серединой диагоналей  $AC$  и  $BD$ .



Запишите доказательство.

8

Все члены бесконечной геометрической прогрессии положительны, первый член равен 3, а третий член равен  $\frac{1}{3}$ . Чему равна сумма этой прогрессии?

- Ⓐ  $\frac{27}{8}$
- Ⓑ  $\frac{10}{3}$
- Ⓒ  $\frac{9}{4}$
- Ⓓ  $\frac{9}{2}$

MA23069

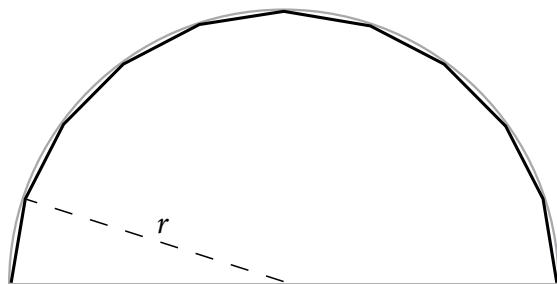
9

Решите неравенство  $\frac{x+1}{x-2} > 1$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

MA23135

10



На рисунке изображена комната (вид сверху), которая имеет форму полукруга. Архитектор планирует расположить подряд 10 одинаковых плоских окон на круглой стене комнаты, как показано на рисунке. По какой из следующих формул, где  $r$  – радиус круга, архитектор может вычислить ширину  $w$  каждого окна?

- Ⓐ  $w = r \sin 9^\circ$
- Ⓑ  $w = 2r \sin 9^\circ$
- Ⓒ  $w = r \cos 18^\circ$
- Ⓓ  $w = 2r \sin 18^\circ$

MA23021

11

Вычислите  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ .

Приведите решение.

M6\_04

MA23165

12

Найдите  $f'(x)$ , если  $f(x) = e^{\cos x}$ .

- Ⓐ  $e^{\cos x}$
- Ⓑ  $e^{-\sin x}$
- Ⓒ  $e^{\cos x} \cdot \sin x$
- Ⓓ  $-e^{\cos x} \cdot \sin x$

M6\_05

MA23039

13

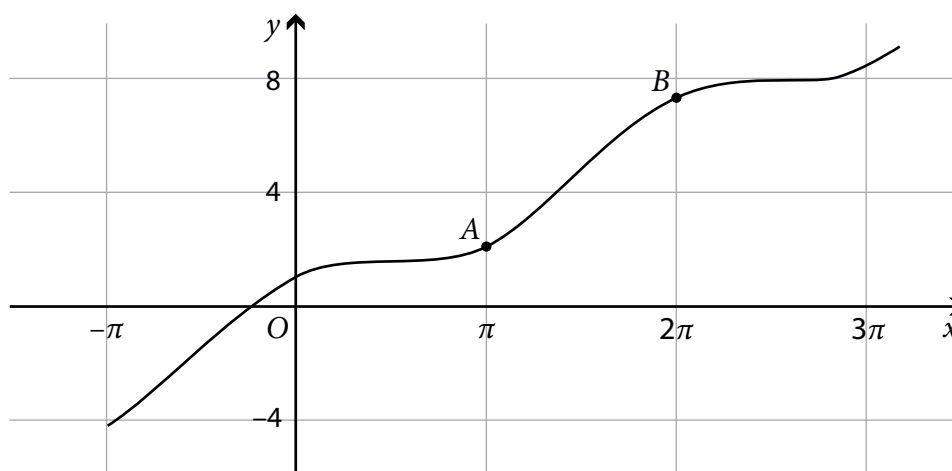
Найдите  $f'(x)$ , если  $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ .

Приведите решение.

M6\_06

MA23159

14



M6\_07

На рисунке изображен график функции  $y = x + \cos x$ . Софья утверждает, что угловые коэффициенты касательных к этому графику в точках A и B одинаковы. Объясните, почему ее утверждение верно.

MA23198

15

Укажите общий вид первообразных для функции  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$  при  $x > 0$ .

- Ⓐ  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x^2} + C$
- Ⓑ  $\frac{1}{2}x^2 + 2 \ln x + C$
- Ⓒ  $\frac{1}{2}x^2 + \ln 2x + C$
- Ⓓ  $\frac{4}{3}x^3 + 4x^3 + C$

MA23042

16

Сколько корней имеет уравнение  $\sin x + \cos x = 2$  на интервале  $(0; 8\pi)$ ?

- Ⓐ 0
- Ⓑ 2
- Ⓒ 4
- Ⓓ 8

MA23080

17

Лист бумаги толщиной 0,01 см разрезали пополам и одну часть положили на другую. Затем полученную стопку из двух листов снова разрезали пополам и сложили в стопку из четырех листов. Какой толщины получится стопка бумаги, если эту операцию проделать еще 8 раз?

- Ⓐ 0,2 см
- Ⓑ 10,24 см
- Ⓒ 20,48 см
- Ⓓ 32,0 см

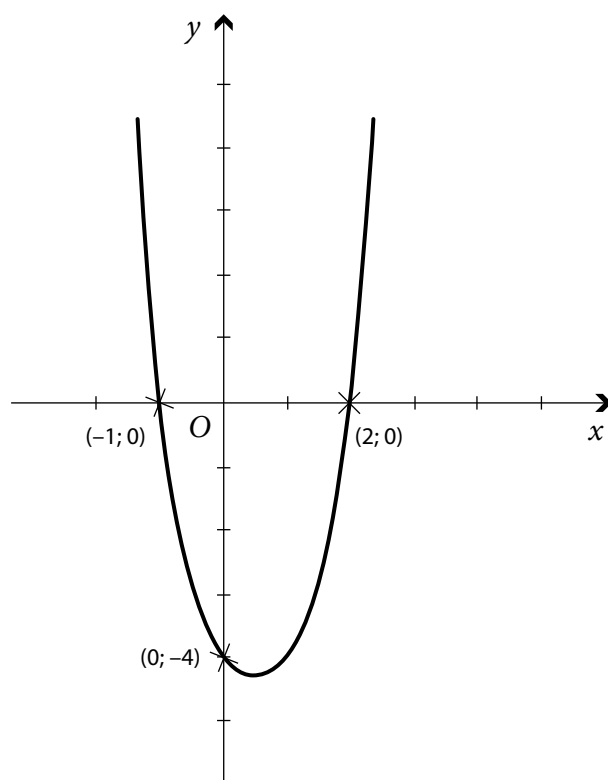
MA23004

18

Какому из следующих чисел равно  $\frac{5}{x}$ , если  $x = -1 + \frac{1}{2}i$ ?

- Ⓐ  $-5 + i$
- Ⓑ  $-4 - 2i$
- Ⓒ  $-4 + 2i$
- Ⓓ  $4 + 2i$

MA23063



На рисунке изображен график функции  $f$ , которая задается формулой  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Найдите значения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Приведите решение.

20

Функция  $f$  задана формулой  $f(x) = x^2 + 4$ , а функция  $g$  задана формулой  $g(u) = \sqrt{2u - 1}$ . Найдите наименьшее значение функции  $g(f(x))$ .

- Ⓐ 0
- Ⓑ  $\sqrt{3}$
- Ⓒ  $\sqrt{\frac{7}{2}}$
- Ⓓ  $\sqrt{7}$

MA23133

21

Приближаясь к железнодорожному переезду, машина начинает тормозить и за время торможения в течение  $t$  секунд проезжает расстояние  $s(t) = -t^2 + 20t$  метров. Какое расстояние проедет машина с момента начала торможения до полной остановки?

- Ⓐ – 20 м
- Ⓑ 10 м
- Ⓒ 50 м
- Ⓓ 100 м

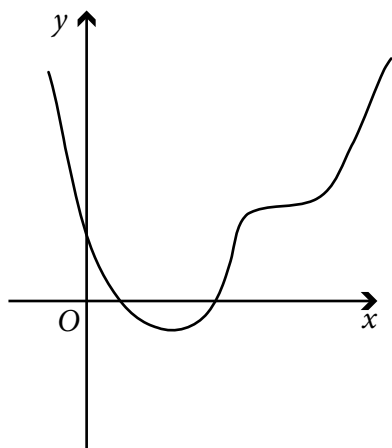
MA23158

22

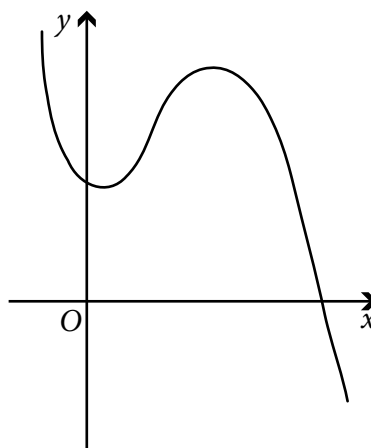
Какой из предложенных ниже графиков обладает всеми следующими свойствами:

$$f(-1) > 0, f(3) < 0, f'(5) = 0, f''(5) < 0 ?$$

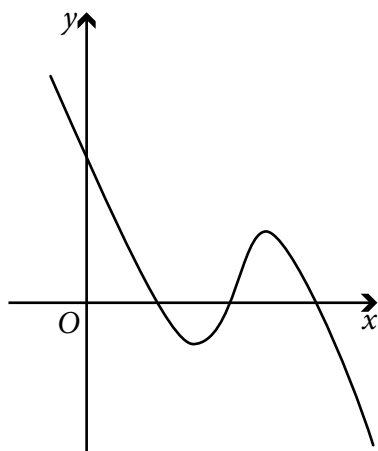
Ⓐ



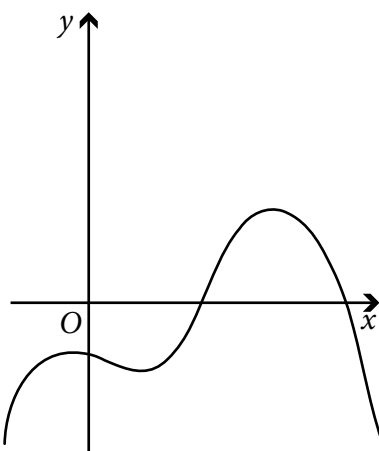
Ⓑ



Ⓒ



Ⓓ



$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

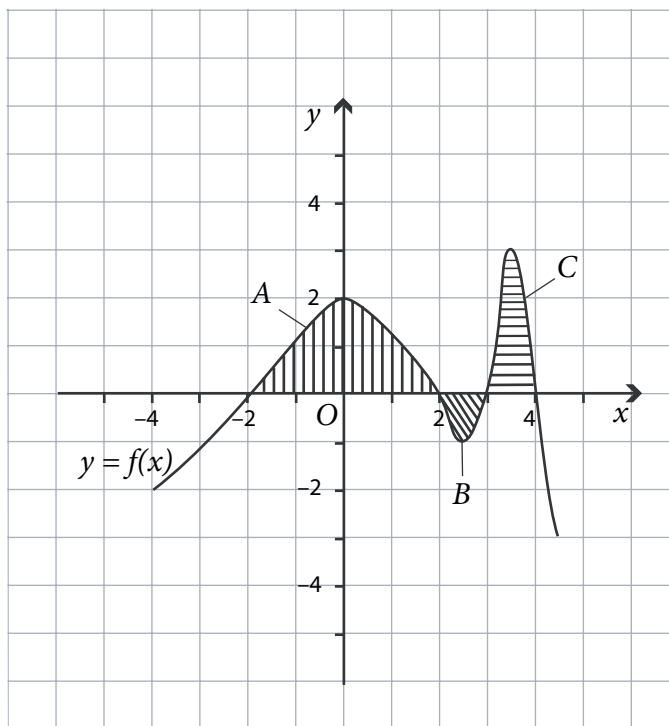
- А. Найдите значение абсцисс точек пересечения графика данной функции с осью  $Ox$ .

$x =$  \_\_\_\_\_

- В. Найдите точки максимума и минимума данной функции.

Точка(и) максимума: \_\_\_\_\_

Точка(и) минимума: \_\_\_\_\_



Фигуры, расположенные на рисунке между графиком функции  $y = f(x)$  и осью абсцисс, имеют следующие площади: фигура  $A - 4,8$ , фигура  $B - 0,8$ , фигура  $C - 2$ .

Чему равен интеграл  $\int_{-2}^4 f(x)dx$ ?

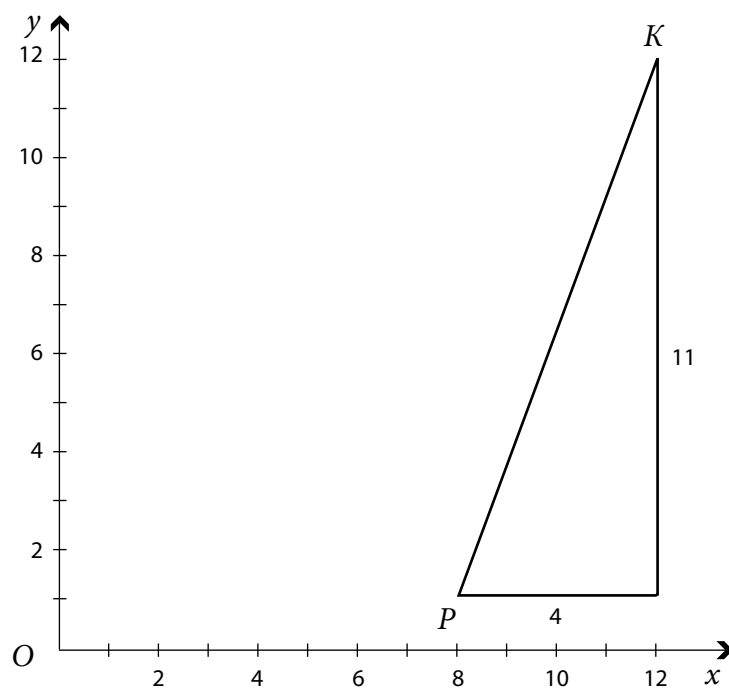
- Ⓐ 5,6
- Ⓑ 6,0
- Ⓒ 6,8
- Ⓓ 7,6

25

Каков общий вид первообразных для функции  $f(x) = e^{1+4x}$ ?

- Ⓐ  $\frac{1}{4}e^{1+4x} + C$
- Ⓑ  $e^{1+4x} + C$
- Ⓒ  $4e^{1+4x} + C$
- Ⓓ  $e^{x+2x^2} + C$

MA23041



Прямая  $l$  проходит через точки  $A(1; -2)$  и  $B(3; 4)$ . Параллельна ли прямая  $l$  прямой  $PK$ ?

Объясните свой ответ.

# Использование калькулятора

1. Пользовались ли вы калькулятором при выполнении заданий в этой тетради?

- Ⓐ Да
- Ⓑ Нет

**Если вы не пользовались калькулятором, то вам не надо отвечать на последующие вопросы. Благодарим вас.**

**Если вы пользовались калькулятором, пожалуйста, ответьте на каждый из следующих вопросов.**

2. Калькулятор, который я использовал ...

- Ⓐ простой – выполняет только основные операции (+, −, ·, :, % или  $\sqrt{\quad}$ ), но не может находить значения таких функций, как  $\log$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ;
- Ⓑ научный – выполняет основные операции (+, −, ·, :, % или  $\sqrt{\quad}$ ), а также может находить значения таких функций, как  $\log$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ;
- Ⓒ программируемый – выполняет все, что делает научный калькулятор, и может хранить и выполнять короткие программы;
- Ⓓ графический – выполняет все, что делают научный и программируемый калькуляторы, и может изображать на дисплее некоторые графики.

3. При выполнении теста я пользовался калькулятором ...

- Ⓐ очень редко (при ответе менее чем на 5 вопросов)
- Ⓑ иногда (при ответе на 5-10 вопросов)
- Ⓒ достаточно часто (при ответе более чем на 10 вопросов).

4. Марка и модель калькулятора, которым я пользовался, – это \_\_\_\_\_.

**Благодарим вас за то, что вы ответили на поставленные вопросы!**



BOSTON  
COLLEGE



Международное исследование качества математического  
и естественнонаучного образования

Тетрадь

**Математика**  
**(профильный уровень)**

**D1**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Институт стратегии развития образования  
Российской академии образования  
Центр оценки качества образования  
105062 Москва, ул. Макаренко, д. 5/16  
тел./факс: (495)621-76-36  
e-mail: centeroko@mail.ru  
<http://www.centeroko.ru>



© IEA  
International Association  
for the Evaluation of  
Educational Achievement

[timssandpirls.bc.edu](http://timssandpirls.bc.edu)